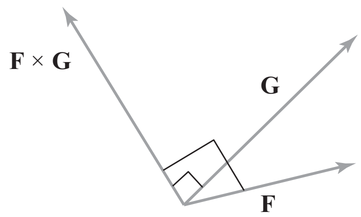
W przypadku 2. możemy pokazać, że **F** i **F** × **G** są ortogonalne, biorąc ich iloczyn skalarny:

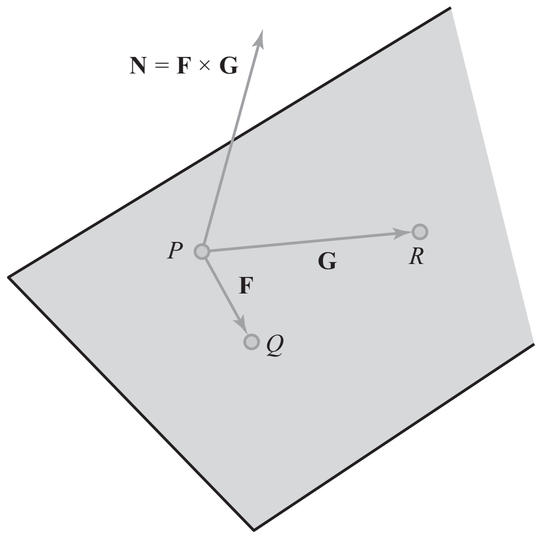
$$\begin{aligned}&\mathbf{F}\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G})\\ &\quad = a_1[b_1c_2 - b_2c_1] + b_1[a_2c_1 - a_1c_2] + c_1[a_1b_2 - a_2b_1] = 0.\end{aligned}$$

Podobnie, $\mathbf{G}\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = 0$.

Rysunek 10.16 ilustruje tę ortogonalność. Nierównoległe wektory **F** i **G** wyznaczają płaszczyznę, a **F** × **G** jest normalny do tej płaszczyzny, ortogonalny zarówno do **F**, jak i **G.** Rysunek ilustruje również *regułę prawej ręki*. Jeśli prawa ręka jest trzymana z palcami zorientowanymi od **F** do **G**, to wyciągnięty kciuk będzie wskazywał (w przybliżeniu) w kierunku **F** × **G**. Jeśli ręka jest odwrócona, a palce są zorientowane od **G** do **F**, to kciuk będzie wskazywał przeciwny kierunek, ilustrując antyprzemienność iloczynu wektorowego.



RYSUNEK 10.16. **F** × **G** jest prostopadłe do **F** i do **G**

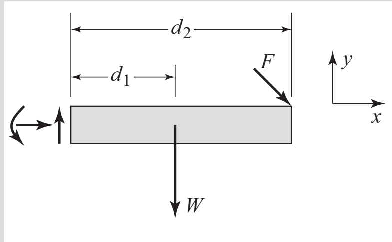


RYSUNEK 10.17. Znajdowanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty niewspółliniowe

Własność 4. pozwala wygodnie sprawdzić, czy trzy punkty są *współliniowe* (leżą na jednej prostej). Punkty P, Q i R są współliniowe dokładnie wtedy, gdy wektor **F** z P do Q jest równoległy do wektora **G** z P do R. Zgodnie z własnością 4., ma to miejsce, gdy **F** × **G** = **O**.

Fakt, że iloczyn wektorowy dwóch wektorów jest ortogonalny do obu z nich, sugeruje strategię dla znalezienia równania płaszczyzny, mając trzy nieliniowe punkty na płaszczyźnie (zamiast jednego punktu i wektora normalnego). Mając P, Q i R jako punkty, należy wybrać jeden z punktów, powiedzmy P, i utworzyć wektory **F** = **PQ** i **G** = **PR**, od P do Q i od P do R, jak na rysunku 10.17. Wtedy **N** = **F** × **G** jest prostopadły do płaszczyzny i jest niezerowy, ponieważ **F** i **G** nie są równoległe. Daje nam to wektor normalny do płaszczyzny. Możemy użyć tego wektora normalnego i dowolnego z trzech podanych punktów do wyznaczenia równania płaszczyzny.

Matematyka w kontekście – pełna analiza statyczna belki wspornikowej



Można przeprowadzić pełną analizę statyczną wspomnianej wcześniej belki wspornikowej, korzystając z następujących równań równowagi:

$$\sum F_{net,x} = 0, \quad \sum F_{net,y} = 0, \quad \sum M_{net} = 0$$

W tym przykładzie można użyć $F = <2, -2, 0>$ N, $W = <0, -2, 0>$ N, $d_1 = <1, 0, 0>$ m, $d_2 = <2, 0, 0>$ m.

Wcześniej stwierdziliśmy, że $F_x = <2, 0, 0>$ N, i $F_y = <0, -2, 0>$ N. Siła W oddziałuje wyłącznie w kierunku y, więc można to wykorzystać do rozwiązania dwóch pierwszych równań równowagi w następujący sposób:

$$F_{R,osiowa} + F_x = 0 \qquad F_{R,ścinania} + W + F_y = 0$$

$$F_{R,osiowa} = <-2, 0, 0> \text{ N} \qquad F_{R,ścinania} = <0, 4, 0> \text{ N}$$

Zatem ostatnią wewnętrzną siłą reakcji, którą należy obliczyć, jest wewnętrzny moment zginający. Aby obliczyć moment wywołany przez siłę, należy użyć iloczynu wektorowego. Moment, w swojej najprostszej (i skalarnej) formie, jest definiowany jako siła pomnożona przez prostopadłą odległość do punktu, względem którego przyjmujemy moment. Tutaj przyjmujemy moment względem lewej strony belki. Użycie iloczynu wektorowego oszczędza kłopotu związanego z rozkładaniem siły na jej składowe x i y oraz rozwiązywaniem równania na moment, do którego przyczynia się każda z tych sił. Równanie do rozwiązania dla momentu to:

$$M = r \times F$$

Korzystając z tego równania i ostatniego równania równowagi, można obliczyć moment reakcji w belce.

$$M_R + W \times d1 + F \times d2 = 0$$

$$M_R = <0, 0, 2> + <0, 0, 4> = <0, 0, 6> \text{ N} \cdot \text{m}$$

Zauważmy, że konwencją opisywania kierunku momentów jest oś, wokół której następuje obrót. Dlatego momenty występują na osi poza krawędzią, mimo że jest to zadanie płaskie. To rozwiązanie spełnia również warunek, że wektor będący wynikiem iloczynu wektorowego jest zawsze prostopadły do obu oryginalnych wektorów.

PRZYKŁAD 10.6.

Znajdź równanie płaszczyzny zawierającej punkty $P:(-1, 4, 2)$, $Q:(6, -2, 8)$ i $R:(5, -1\ \ -1)$.

Użyj tych punktów do znalezienia dwóch wektorów na płaszczyźnie, powiedzmy

$$\mathbf{F} = \mathbf{PQ} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \text{ i } \mathbf{G} = \mathbf{PR} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

Znajdź iloczyn wektorowy tych wektorów

$$\mathbf{N} = \mathbf{F} \times \mathbf{G} = 48\mathbf{i} + 57\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

N jest normalny do poszukiwanej płaszczyzny. Mamy również punkt na tej płaszczyźnie (wybierz dowolny spośród P, Q i R). Wybierając punkt P, dostajemy równanie płaszczyzny

$$48(x + 1) + 57(y - 4) + (z - 2) = 0$$

lub

$$48x + 57y + z = 182.$$

Otrzymamy tę samą płaszczyznę, używając punktów Q lub R zamiast P.