

Spis treści

Wstęp	XI
-------------	----

Oznaczenia	XIII
------------------	------

Zadania

1. Liczby zespolone	3
1.1. Własności liczb zespolonych	3
1.1.A. Zadania łatwe	4
1.1.B. Zadania trudne	12
1.2. Topologia płaszczyzny zespolonej	14
1.2.A. Zadania łatwe	15
1.2.B. Zadania trudne	16
2. Ciągi i szeregi liczb zespolonych	17
2.1. Ciągi liczb zespolonych	17
2.1.A. Zadania łatwe	18
2.1.B. Zadania trudne	19
2.2. Szeregi liczbowe	21
2.2.A. Zadania łatwe	23
2.2.B. Zadania trudne	24
3. Podstawowe funkcje zespolone	26
3.1. Własności funkcji	26
3.1.A. Zadania łatwe	27
3.1.B. Zadania trudne	28
3.2. Funkcja wykładnicza i logarytm	28
3.2.A. Zadania łatwe	29
3.2.B. Zadania trudne	29
3.3. Funkcje trygonometryczne i hiperboliczne	30
3.3.A. Zadania łatwe	30
3.3.B. Zadania trudne	31
4. Holomorficzność	33
4.1. Różniczkowanie w dziedzinie zespolonej	33

4.1.A.	Zadania łatwe	33
4.1.B.	Zadania trudne	34
4.2.	Równania Cauchy'ego–Riemanna i holomorficzność	34
4.2.A.	Zadania łatwe	35
4.2.B.	Zadania trudne	37
4.3.	Funkcje harmoniczne	38
4.3.A.	Zadania łatwe	39
4.3.B.	Zadania trudne	39
5.	Homografie i odwzorowania z nimi związane	41
5.1.	Odwzorowania afiniczne	41
5.1.A.	Zadania łatwe	41
5.1.B.	Zadania trudne	42
5.2.	Własności ogólne homografii	43
5.2.A.	Zadania łatwe	43
5.2.B.	Zadania trudne	44
5.3.	Dwustosunek czterech punktów i symetria względem okręgu	45
5.3.A.	Zadania łatwe	45
5.3.B.	Zadania trudne	47
5.4.	Konstruowanie odwzorowań	47
5.4.A.	Zadania łatwe	47
5.4.B.	Zadania trudne	47
6.	Całkowanie w dziedzinie zespolonej I	49
6.1.	Podstawy całkowania	49
6.1.A.	Zadania łatwe	50
6.1.B.	Zadania trudne	51
6.2.	Twierdzenia i wzory całkowe Cauchy'ego	52
6.2.A.	Zadania łatwe	53
6.2.B.	Zadania trudne	54
6.3.	Funkcja pierwotna i niezależność od drogi całkowania	57
6.3.A.	Zadania łatwe	58
6.3.B.	Zadania trudne	60
6.4.	Indeks krzywej względem punktu i wersja homologiczna wzoru Cauchy'ego	61
6.4.A.	Zadania łatwe	62
6.4.B.	Zadania trudne	63
7.	Ciągi i szeregi funkcyjne	64
7.1.	Własności ogólne	64
7.1.A.	Zadania łatwe	65
7.1.B.	Zadania trudne	66
7.2.	Szeregi potęgowe	67
7.2.A.	Zadania łatwe	69
7.2.B.	Zadania trudne	71
7.3.	Szeregi Taylora	73
7.3.A.	Zadania łatwe	74
7.3.B.	Zadania trudne	75
8.	Osobliwości izolowane i szereg Laurenta	78
8.1.	Osobliwości funkcji holomorficznych	78

8.1.A.	Zadania łatwe	79
8.1.B.	Zadania trudne	80
8.2.	Szereg Laurenta	81
8.2.A.	Zadania łatwe	82
8.2.B.	Zadania trudne	83
8.3.	Residua	85
8.3.A.	Zadania łatwe	85
8.3.B.	Zadania trudne	86
9.	Całkowanie w dziedzinie zespolonej II	88
9.1.	Twierdzenie o residuach	88
9.1.A.	Zadania łatwe	88
9.1.B.	Zadania trudne	89
9.2.	Zastosowania twierdzenia o residuach	90
9.2.A.	Zadania łatwe	90
9.2.B.	Zadania trudne	91
10.	Wnioski ze wzoru całkowego Cauchy'ego	93
10.1.	Zasada maksimum	93
10.1.A.	Zadania łatwe	93
10.1.B.	Zadania trudne	94
10.2.	Lemat Schwarz'a	96
10.2.A.	Zadania łatwe	96
10.2.B.	Zadania trudne	97
10.3.	Zasada argumentu	99
10.3.A.	Zadania łatwe	99
10.3.B.	Zadania trudne	101
10.4.	Twierdzenie Rouché'a	102
10.4.A.	Zadania łatwe	102
10.4.B.	Zadania trudne	103

Rozwiązania

1.	Liczby zespolone	107
1.1.	Własności liczb zespolonych	107
1.1.A.	Zadania łatwe	107
1.1.B.	Zadania trudne	132
1.2.	Topologia płaszczyzny zespolonej	139
1.2.A.	Zadania łatwe	139
1.2.B.	Zadania trudne	143
2.	Ciągi i szeregi liczb zespolonych	147
2.1.	Ciągi liczb zespolonych	147
2.1.A.	Zadania łatwe	147
2.1.B.	Zadania trudne	151
2.2.	Szereg liczbowe	157
2.2.A.	Zadania łatwe	157
2.2.B.	Zadania trudne	161

3. Podstawowe funkcje zespolone	167
3.1. Własności funkcji	167
3.1.A. Zadania łatwe	167
3.1.B. Zadania trudne	170
3.2. Funkcja wykładnicza i logarytm	173
3.2.A. Zadania łatwe	173
3.2.B. Zadania trudne	174
3.3. Funkcje trygonometryczne i hiperboliczne	178
3.3.A. Zadania łatwe	178
3.3.B. Zadania trudne	183
4. Holomorficzność	186
4.1. Różniczkowanie w dziedzinie zespolonej	186
4.1.A. Zadania łatwe	186
4.1.B. Zadania trudne	188
4.2. Równania Cauchy'ego–Riemanna i holomorficzność	189
4.2.A. Zadania łatwe	189
4.2.B. Zadania trudne	194
4.3. Funkcje harmoniczne	198
4.3.A. Zadania łatwe	198
4.3.B. Zadania trudne	200
5. Homografie i odwzorowania z nimi związane	204
5.1. Odwzorowania afiniczne	204
5.1.A. Zadania łatwe	204
5.1.B. Zadania trudne	206
5.2. Własności ogólne homografii	209
5.2.A. Zadania łatwe	209
5.2.B. Zadania trudne	214
5.3. Dwustosunek czterech punktów i symetria względem okręgu	217
5.3.A. Zadania łatwe	217
5.3.B. Zadania trudne	219
5.4. Konstruowanie odwzorowań	221
5.4.A. Zadania łatwe	221
5.4.B. Zadania trudne	224
6. Całkowanie w dziedzinie zespolonej I	227
6.1. Podstawy całkowania	227
6.1.A. Zadania łatwe	227
6.1.B. Zadania trudne	230
6.2. Twierdzenia i wzory całkowe Cauchy'ego	234
6.2.A. Zadania łatwe	234
6.2.B. Zadania trudne	239
6.3. Funkcja pierwotna i niezależność od drogi całkowania	250
6.3.A. Zadania łatwe	250
6.3.B. Zadania trudne	252
6.4. Indeks krzywej względem punktu i wersja homologiczna wzoru Cauchy'ego	255
6.4.A. Zadania łatwe	255
6.4.B. Zadania trudne	257

7. Ciągi i szeregi funkcyjne	260
7.1. Własności ogólne	260
7.1.A. Zadania łatwe	260
7.1.B. Zadania trudne	263
7.2. Szeregi potęgowe	269
7.2.A. Zadania łatwe	269
7.2.B. Zadania trudne	274
7.3. Szeregi Taylora	281
7.3.A. Zadania łatwe	281
7.3.B. Zadania trudne	286
8. Osobliwości izolowane i szereg Laurenta	295
8.1. Osobliwości funkcji holomorficznych	295
8.1.A. Zadania łatwe	295
8.1.B. Zadania trudne	297
8.2. Szereg Laurenta	301
8.2.A. Zadania łatwe	301
8.2.B. Zadania trudne	307
8.3. Residua	313
8.3.A. Zadania łatwe	313
8.3.B. Zadania trudne	316
9. Całkowanie w dziedzinie zespolonej II	320
9.1. Twierdzenie o residuach	320
9.1.A. Zadania łatwe	320
9.1.B. Zadania trudne	323
9.2. Zastosowania twierdzenia o residuach	326
9.2.A. Zadania łatwe	326
9.2.B. Zadania trudne	330
10. Wnioski ze wzoru całkowego Cauchy'ego	335
10.1. Zasada maksimum	335
10.1.A. Zadania łatwe	335
10.1.B. Zadania trudne	339
10.2. Lemat Schwarz'a	343
10.2.A. Zadania łatwe	343
10.2.B. Zadania trudne	347
10.3. Zasada argumentu	353
10.3.A. Zadania łatwe	353
10.3.B. Zadania trudne	358
10.4. Twierdzenie Rouchégo	368
10.4.A. Zadania łatwe	368
10.4.B. Zadania trudne	370

Bibliografia	375
---------------------	-----

Skorowidz	377
------------------	-----

Nowoczesny zbiór zadań z analizy zespolonej!

Analiza zespolona to dział matematyki obejmujący teorię funkcji zespolonych jednej i wielu zmiennych rzeczywistych bądź zespolonych. Ta gałąź matematyki znajduje zastosowanie m.in. w matematyce finansowej, modelowaniu matematycznym, teorii fraktali oraz w fizyce i technice. Analiza zespolona jest zatem jednym z podstawowych elementów wykształcenia matematycznego. W książce zamieszczono 550 zadań ułatwiających studentom przyswojenie wiedzy z tego ważnego działu matematyki.

Pierwsza część zawiera zadania pogrupowane zarówno tematycznie, jak i ze względu na stopień trudności. Dotyczą one:

- własności liczb zespolonych,
- ciągów i szeregów liczbowych oraz funkcyjnych (w tym szeregów potęgowych i szeregów Taylora),
- funkcji zespolonych,
- holomorficzności i funkcji harmonicznych,
- homografii i związanych z nimi odwzorowań,
- całkowania w dziedzinie zespolonej,
- osobliwości funkcji holomorficznych,
- szeregów Laurenta i rachunku residuów.

W drugiej części Czytelnik znajdzie pełne rozwiązania wszystkich zadań z części pierwszej. Dzięki różnicowaniu stopnia trudności zadań możliwe jest wykorzystanie zbioru na ćwiczeniach do wykładów zarówno uniwersyteckich, jak i politechnicznych studiów licencjackich i magisterskich. Zbiór może być również przydatny osobom samodzielnie uczącym się analizy zespolonej.

Polecamy także:

W. Rudin: *Analiza rzeczywista i zespolona*

J. Krzyż: *Zbiór zadań z funkcji analitycznych*