

# Inhalt

Vorwort 9

## Kapitel I Algebraische Strukturen (*Geiß*) 11

Vorbemerkungen 11

Grundlagen 13

Mengen 13 · Abbildungen einer Menge  $M$  in eine Menge  $W$  14 · (Zweistellige) Verknüpfungen in einer Menge 16 · (Zweistellige) Relationen in einer Menge 16 · Zeichen 18

Verknüpfungsgebilde 18

Die Kommutativität einer Verknüpfung 20 · Die Assoziativität einer Verknüpfung 21

Die Existenz von neutralen Elementen 22 · Die Existenz von inversen Elementen zu gegebenem Element 23 · Aufgaben 24

Gruppen 26

Beispiele und Gegenbeispiele 27 · Untergruppen 33 · Ordnung von Elementen 34

Zyklische Gruppen 35 · Elementare Gruppen-Eigenschaften 35 · Isomorphie von Gruppen 38 · Aufgaben 41

Überblick zu Algebraischen Strukturen 44

Ring 44 · Körper 45 · Vektorraum 47 · Verband 50 · Zahlen 55

Lösungen der Aufgaben 59

Verknüpfungsgebilde 59 · Gruppen 61

## Kapitel II Analysis (*Geiß*) 67

Grundlagen 67

Gebrauch der üblichen Schreib- und Sprechweisen der Mengenlehre 67 · Sicherheit beim

Rechnen mit Zahlen und Termen 67 · Anordnung und elementare Ungleichungen 67

Absolutbetrag 68 · Intervalle und Umgebungen; Häufungspunkte 69 · Obere und untere

Schranken 70 · Lückenlosigkeit der reellen Zahlen 70 · Aufgaben 72

Funktionen 73

Reelle Funktionen als Zuordnungen 73 · Graphische Darstellung von Funktionen 75

Trigonometrische Funktionen 77 · Treppenfunktionen 78 · Zweite Definition des Funk-

tionsbegriffes 79 · Beziehungen zwischen Funktionen 80 · Polynomfunktionen; Horner-

Schema 82 · Eigenschaften von Funktionen 85 · Aufgaben 86

Grenzwert und Stetigkeit 88

Weitere Beispiele von Funktionen 88 · Geometrische Betrachtungen zum Grenzwert-

Begriff 89 · Analytische Fassung des Grenzwert-Begriffs 92 · Sätze über Grenzwerte 93

Aufgaben 95 · Stetigkeit an einer Stelle 95 · Stetigkeit im abgeschlossenen Intervall 97

Aufgaben 100

Differenzierbarkeit 101

Tangentenproblem 101 · Ableitungsfunktion 105 · Andere Zugänge zur Differential-

rechnung 108 · Aufgaben 111 · Sätze und Beispiele zur Differentiation 112

Aufgaben 122 · Maxima und Minima bei differenzierbaren Funktionen 123

Aufgaben 130 · Umkehrfunktionen 131 · Aufgaben 136



## Integrierbarkeit 136

Flächenproblem 136 · Das bestimmte Integral 139 · Sätze über bestimmte Integrale 142  
Aufgaben 146 · Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 147  
Logarithmusfunktion und Exponentialfunktion 153 · Beispiele zur Integralrechnung 157  
Aufgaben 164

## Differentialgleichungen 165

Einführende Beispiele 165 · Richtungsfelder 168 · Zur Lösung einiger Differential-  
gleichungen zweiter Ordnung 172 · Aufgaben 174

## Folgen und Reihen 175

Unendliche Folgen 175 · Reihen 181 · Aufgaben 184

## Lösungen der Aufgaben 185

Grundlagen 185 · Funktionen 186 · Grenzwert 189 · Stetigkeit 190 · Differenzierbar-  
keit 191 · Integrierbarkeit 195 · Differentialgleichungen 198 · Folgen und Reihen 199

## Kapitel III Geometrie und Lineare Algebra (*Brauner*) 201

### Warum Geometrie und Algebra? – Geometrische Axiome 201

Euklidische Geometrie und alternative Geometrien 201 · Das Zahlenpaarmodell der  
ebenen euklidischen Geometrie 204

### Analytische Koordinatengeometrie 207

Einleitung 207 · Das zweidimensionale kartesische Koordinatensystem und die Grund-  
elemente der ebenen Geometrie 207 · Strecken und Flächen 208 · Beispiele und Auf-  
gaben 211 · Geraden und Halbebenen 212 · Beispiele und Aufgaben 219 · Kreise 222  
Beispiele und Aufgaben 226 · Dreidimensionale Koordinatengeometrie – ein Ausblick 229

### Vektorielle analytische Geometrie 234

Einleitung 234 · Der dreidimensionale affine Punktraum 235 · Veranschaulichung der  
vektoralgebraischen Operationen (Beispiele und Aufgaben) 247 · Komponentendar-  
stellung von Vektoren 256 · Beispiele und Aufgaben 257 · Die Erweiterung des affinen  
zum euklidischen Punktraum 259 · Beispiele und Aufgaben 265

### Zusammenhang von Koordinatengeometrie und Vektorgeometrie 268

Koordinatensystem, Ortsvektoren und Spaltendarstellung von Vektoren 268 · Vektorielle  
Herleitung von Gleichungen der Koordinatengeometrie (Beispiele und Aufgaben) 269  
Weitere Beispiele und Aufgaben aus der Raumgeometrie 269

### Systeme linearer Gleichungen 272

Vorbemerkungen 272 · Lösungsverfahren und geometrische Veranschaulichung 272  
Weitere geometrische Veranschaulichungen, Beispiele und Aufgaben 286 · Vektorielle  
Behandlung der Systeme linearer Gleichungen 290 · Die Struktur der Lösungsmenge  
linearer Gleichungssysteme 294 · Zusammenfassung und Ergänzung 303 · Beispiele  
praktischer Anwendung von linearen Gleichungssystemen 304

### Systeme linearer Ungleichungen und lineares Optimieren 312

Lineare Ungleichungssysteme 312 · Lineares Optimieren 319

### Lösungen der Aufgaben 339

Analytische Koordinatengeometrie 339 · Vektorielle analytische Geometrie 340  
Zusammenhang von Koordinatengeometrie und Vektorgeometrie 342 · Systeme linearer  
Gleichungen 343 · Systeme linearer Ungleichungen und lineares Optimieren 345

## Kapitel IV Stochastik (*Sewerin*) 347

### Zufall, Ereignis und Häufigkeit 347

Einleitung 347 · Zufallsversuche und Ergebnismenge 347 · Ereignisse 349 · Relative Häufigkeiten 352 · Aufgaben 354

### Wahrscheinlichkeiten 355

Aufgaben 362

### Kombinatorik 363

Die vollständige Induktion 364 · Die Summen- und Produktregel der Kombinatorik 366  
Geordnete Stichproben mit Zurücklegen 368 · Geordnete Stichproben ohne Zurücklegen 369 · Ungeordnete Stichproben ohne Zurücklegen; s-Teilungen 370  
Aufgaben 373

### Mehrstufige Zufallsprozesse 375

Die Pfadregeln 375 · Unabhängige Ereignisse 379 · Aufgaben 381

### Bedingte Wahrscheinlichkeiten 383

Definition und Eigenschaften 383 · Totale Wahrscheinlichkeit 386 · Aufgaben 389

### Zufallsvariable 390

Wahrscheinlichkeitsverteilungen 390 · Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung 392 · Verknüpfungen von Zufallsvariablen 395 · Die Tschebyschew-Ungleichung 398 · Aufgaben 400

### Die Binomialverteilung 402

Bernoulli-Ketten 402 · Die Binomial-Verteilung 403 · Die wahrscheinlichste Anzahl von Erfolgen 406 · Summenwahrscheinlichkeiten 406 · Aufgaben 409

### Die Poisson-Verteilung 410

Die Poisson-Näherung 410 · Die Poisson-Verteilung 413 · Aufgaben 415

### Die Normalverteilung 415

Stetige Verteilungen 415 · Die Normalverteilung 418 · Binomialverteilung und Normalverteilung 421 · Der Zentrale Grenzwertsatz 426 · Aufgaben 427

### Statistische Anwendungen 428

Beschreibende Statistik 428 · Schätzwerte für Mittelwert und Varianz 431 · Vertrauensintervalle für den Mittelwert 433 · Testen von Hypothesen 436 · Der statistische Alternativ-Test 438 · Vier- und Mehrfeldertafeln 440 · Der  $\chi^2$ -Test 441 · Aufgaben 444

### Lösungen der Aufgaben 447

Zufall, Ereignis und Häufigkeit 447 · Wahrscheinlichkeiten 448 · Kombinatorik 448  
Mehrstufige Zufallsprozesse 450 · Bedingte Wahrscheinlichkeiten 451 · Zufallsvariable 452 · Die Binomialverteilung 453 · Die Poisson-Verteilung 453 · Die Normalverteilung 454 · Statistische Anwendungen 455

### Register 456