

Spis treści

Rozdział I. Wstęp do matematyki	13
1.1. Elementy logiki i teorii zbiorów.....	13
1.1.1. Rachunek zdań.....	13
1.1.2. Reguły wnioskowania.....	16
1.1.3. Funkcja zdaniowa i kwantyfikatory	17
1.1.4. Działania na zbiorach	18
Zadania	20
1.2. Funkcje i relacje.....	21
1.2.1. Relacja	21
1.2.2. Relacja równoważności.....	22
1.2.3. Funkcja.....	24
1.2.4. Ciąg	24
1.2.5. Działania na funkcjach.....	25
1.2.6. Obraz i przeciwobraz.....	29
Zadania.....	31
1.3. Zbiory liczbowe	31
1.3.1. Liczby naturalne.....	31
1.3.2. Ciała	32
1.3.3. Liczby wymierne i rzeczywiste	34
1.3.4. Liczby zespolone	36
1.3.5. Postać trygonometryczna liczby zespolonej	38
Zadania.....	42
 Rozdział II. Ciągi i szeregi	44
2.1. Przestrzenie metryczne I.....	44
2.1.1. Przykłady przestrzeni metrycznych	44
2.1.2. Kule w przestrzeniach metrycznych.....	46
2.1.3. Zbieżność.....	48
Zadania.....	51
2.2. Ciągi	52
2.2.1. Własności ciągów liczbowych.....	52
2.2.2. Ciągi liczb rzeczywistych.....	53
2.2.3. Metody obliczania granic	55

2.2.4. Ciągi rozbieżne do nieskończoności	66
2.2.5. Ciągi ograniczone	67
Zadania	68
2.3. Szeregi	69
2.3.1. Szeregi liczbowe	69
2.3.2. Kryteria zbieżności szeregów	72
2.3.3. Szeregi potęgowe	
2.3.4. Szeregi funkcyjne	79
2.3.5. Uzupełnienia	82
Zadania	86

Rozdział III. Ciągłość..... 87

3.1. Przestrzeń metryczna II	87
3.1.1. Zbiory otwarte i domknięte	87
3.1.2. Zbiory zwarte	91
3.1.3. Przestrzeń zupełna	92
3.1.4. Zasada Banacha	94
Zadania	100
3.2. Granica i ciągłość funkcji	101
3.2.1. Definicja ciągowa (Heinego)	101
3.2.2. Definicja otoczeniowa (Cauchy'ego)	105
3.2.3. Działania na funkcjach ciągłych	108
3.2.4. Przykłady	110
Zadania	117
3.3. Własności funkcji ciągłych	118
3.3.1. Własność Darboux	118
3.3.2. Funkcje ciągłe na zbiorach zwartych	121
3.3.3. Przestrzeń funkcji ciągłych	123
Zadania	127

Rozdział IV. Różniczkowalność..... 128

4. 1. Pochodna funkcji jednej zmiennej	128
4.1.1. Definicja pochodnej	128
4.1.2. Podstawowe twierdzenia	131
4.1.3. Pochodne funkcji elementarnych	133
4.1.4. Przykłady	135
4.1.5. Pochodne wyższych rzędów	139
Zadania	142
4.2. Twierdzenia o wartości średniej i ich zastosowania	143
4.2.1. Twierdzenia o wartości średniej	143
4.2.2. Wzór Taylora	146
4.2.3. Badanie przebiegu zmienności funkcji	152
4.2.4. Reguła de L'Hospitala	159
4.2.5. Przybliżone rozwiązywanie równań	163
Zadania	166
4.3. Pochodne funkcji wielu zmiennych	167
4.3.1. Elementy algebry liniowej	167
4.3.2. Pochodne cząstkowe	172

4.3.3.	Pochodna Frecheta	173
4.3.4.	Pochodna kierunkowa.....	176
4.3.5.	Zastosowania różniczki i pochodnej	180
4.3.6.	Pochodna funkcji złożonej	183
4.3.7.	Pochodne cząstkowe wyższych rzędów	185
4.3.8.	Pochodne w przestrzeniach unormowanych	187
4.3.9.	Operatory teorii pola.....	188
	Zadania.....	189
4.4.	Ekstrema funkcji	192
4.4.1.	Wzór Taylora.....	192
4.4.2.	Ekstrema lokalne.....	194
4.4.3.	Ekstrema globalne	200
	Zadania.....	201
4.5.	Twierdzenie o funkcji odwrotnej i jego zastosowania	202
4.5.1.	Twierdzenie o funkcji odwrotnej	202
4.5.2.	Twierdzenie o funkcji uwikłanej.....	208
4.5.3.	Powierzchnie	213
4.5.4.	Powierzchnie domknięte i kawałkami gładkie.....	220
4.4.1.	Ekstrema warunkowe.....	222
	Zadania.....	229
Rozdział V. Całki		231
5.1.	Całka nieoznaczona	231
5.1.1.	Definicja całki nieoznaczonej.....	231
5.1.2.	Podstawowe całki	232
5.1.3.	Całkowanie przez części.....	233
5.1.4.	Całkowanie przez podstawienie	235
5.1.5.	Całkowanie funkcji wymiernych.....	237
5.1.6.	Całkowanie pewnych funkcji niewymiernych	242
	Zadania.....	247
5.2.	Całka oznaczona	248
5.2.1.	Definicja całki oznaczonej.....	248
5.2.2.	Całkowalność funkcji	251
5.2.3.	Własności całki oznaczonej.....	254
5.2.4.	Związek między całką oznaczoną i nieoznaczoną.....	256
5.2.5.	Zastosowania geometryczne całki.....	257
5.2.6.	Całki niewłaściwe i ich zastosowania	262
5.2.7.	Twierdzenie o przejściu do granicy pod znakiem całki.....	264
5.2.8.	Różniczkowanie całki zależnej od parametru.....	267
5.2.9.	Uogólnienia: całka Riemanna-Stieltjesa i całka z funkcji o wartościach w $\mathbb{R}^n$	269
5.2.10.	Funkcje specjalne.....	270
	Zadania.....	270
5.3.	Całki wielokrotne.....	272
5.3.1.	Definicja całki wielokrotnej	272
5.3.2.	Całka iterowana i wzór Fubiniego	274
5.3.3.	Całka wielokrotna po dowolnym zbiorze	278
5.3.4.	Zastosowania całek wielokrotnych	283
5.3.5.	Twierdzenie o zamianie zmiennych	287
	Zadania.....	294

5.4. Całki krzywoliniowe.....	296
5.4.1. Orientacja	296
5.4.2. Całka krzywoliniowa zorientowana.....	303
5.4.3. Całka krzywoliniowa niezorientowana.....	308
5.4.4. Związek całek zorientowanych i niezorientowanych.....	309
5.4.5. Zastosowania całek krzywoliniowych	310
5.4.6. Wzór Greena i pole potencjalne	311
Zadania	316
5.5. Całki powierzchniowe	317
5.5.1. Całka powierzchniowa niezorientowana	317
5.5.2. Całka powierzchniowa zorientowana	320
5.5.3. Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego	322
5.5.4. Twierdzenie Stokesa.....	324
5.5.5. Równanie Poissona	327
Zadania	331
Rozdział VI. Funkcje zespolone	333
6.1. Pochodna i całka	333
6.1.1. Pochodna zespolona	333
6.1.2. Równania Cauchy'ego-Riemanna	336
6.1.3. Całka zespolona.....	338
6.1.4. Twierdzenie całkowite Cauchy'ego.....	340
Zadania	344
6.2. Własności funkcji analitycznych.....	345
6.2.1. Wzór całkowy Cauchy'ego	345
6.2.2. Rozwijalność funkcji analitycznej w szereg potęgowy	346
6.2.3. Nierówności Cauchy'ego i zasada maksimum	349
6.2.4. Szereg Laurenta i punkty osobliwe.....	350
Zadania	354
6.3. Zastosowania funkcji analitycznych	355
6.3.1. Rachunek residuów	355
6.3.2. Funkcje harmoniczne.....	359
Zadania	365
Rozdział VII. Równania różniczkowe.....	366
7.1. Metody rozwiązywania równań różniczkowych.....	366
7.1.1. Uwagi ogólne	366
7.1.2. Modele przyrodnicze prowadzące do równań różniczkowych zwyczajnych.....	366
7.1.3. Równanie o zmiennych rozdzielonych	368
7.1.4. Równanie zupełne.....	373
7.1.5. Równanie liniowe i równanie Bernoulliego	376
7.1.6. Równania rzędu drugiego sprowadzalne do równań pierwszego rzędu	380
7.1.7. Uwagi o efektywnym rozwiązywaniu równań różniczkowych.....	383
Zadania.....	383
7.2. Podstawowe twierdzenia	384
7.2.1. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności	384
7.2.2. Metody przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych	391
7.2.3. Ciągła zależność od warunków początkowych i parametru	393

7.2.4. Metoda małego parametru.....	396
7.2.5. Zastosowanie szeregów potęgowych w teorii równań różniczkowych.....	400
Zadania.....	402
7.3. Równania i układy równań liniowych.....	403
7.3.1. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności.....	403
7.3.2. Układ liniowy jednorodny.....	404
7.3.3. Rozwiązanie ogólne układu niejednorodnego.....	406
7.3.4. Układ jednorodny o stałych współczynnikach.....	407
7.3.5. Układ niejednorodny ze stałą macierzą A	416
7.3.6. Równanie liniowe.....	418
7.3.7. Równanie liniowe o stałych współczynnikach.....	419
7.3.8. Analiza równania drgań.....	426
Zadania.....	430
7.4. Elementy jakościowej teorii równań różniczkowych.....	431
7.4.1. Równanie autonomiczne.....	431
7.4.2. Układ zachowawczy.....	434
7.4.3. Stabilność.....	436
7.4.4. Twierdzenie Liouville'a.....	439
Zadania.....	442
7.5. Elementarne wiadomości o równaniach cząstkowych.....	443
7.5.1. Równania cząstkowe pierwszego rzędu.....	443
7.5.2. Równania cząstkowe drugiego rzędu.....	447
Zadania.....	451
Rozdział VIII. Teoria całki Lebesgue'a	453
8.1. Przestrzeń z miarą.....	454
8.1.1. Zbiory mierzalne.....	454
8.1.2. Zbiory borelowskie.....	455
8.1.3. Miara.....	457
8.1.4. Miara Lebesgue'a.....	458
8.1.5. Miara zupełna.....	458
8.1.6. Własności miary.....	460
Zadania.....	462
8.2. Funkcje mierzalne.....	462
8.2.1. Definicja funkcji mierzalnej.....	462
8.2.2. Własności funkcji mierzalnych.....	463
8.2.3. Funkcje proste.....	465
Zadania.....	467
8.3. Całka Lebesgue'a.....	467
8.3.1. Definicja całki Lebesgue'a.....	467
8.3.2. Własności całki Lebesgue'a.....	469
8.3.3. Twierdzenia o przejściu do granicy pod znakiem całki.....	472
8.3.4. Całkowanie funkcji zespolonych.....	478
8.3.5. Całka Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$	480
Zadania.....	481
8.4. Szeregi Fouriera.....	482
8.4.1. Przestrzeń L^2	482
8.4.2. Przestrzeń unitarna i przestrzeń Hilberta.....	484
8.4.3. Układ ortonormalny.....	486

8.4.4. Szeregi Fouriera.....	490
8.4.5. Równanie Laplace'a w kole.....	492
Zadania	495
Rozdział IX. Dodatek.....	496
9.1. Transformacja Fouriera	496
9.1.1. Twierdzenie Fubiniiego	496
9.1.2. Splot	497
9.1.3. Transformacja Fouriera	498
9.1.4. Odwrotna transformacja Fouriera.....	500
9.1.5. Równanie przewodnictwa cieplnego	502
Zadania	503
9.2. Transformacja Laplace'a.....	504
9.2.1. Definicja transformaty Laplace'a	504
9.2.2. Własności transformaty Laplace'a	506
9.2.3. Zastosowania transformacji Laplace'a do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych	507
Zadania	509
9.3. Elementy rachunku wariacyjnego.....	509
9.3.1. Ekstrema funkcjonalów	509
9.3.2. Ekstremale funkcjonału działania	512
9.3.3. Przykłady	515
9.3.4. Związek rachunku wariacyjnego z mechaniką Newtona.....	522
Zadania	523
Literatura uzupełniająca	524
Skorowidz	526