

SPIS TREŚCI

Przedmowa	XI
Literatura uzupełniająca	XII
ROZDZIAŁ 1. PRZESTRZENIE I FORMY	1
§1. Abstrakcyjne przestrzenie liniowe	1
1. Motywacja i aksjomatyka	1
2. Powłoki liniowe. Podprzestrzenie	3
3. Uwagi o interpretacji geometrycznej	6
Ćwiczenia	8
§2. Wymiar i baza	8
1. Liniowa zależność	8
2. Wymiar i baza przestrzeni liniowej	10
3. Współrzędne. Izomorfizm przestrzeni	13
4. Część wspólna i suma algebraiczna podprzestrzeni	16
5. Sumy proste	18
6. Przestrzenie ilorazowe	21
Ćwiczenia	22
§3. Przestrzeń dualna	24
1. Formy liniowe	24
2. Przestrzeń dualna i baza dualna	25
3. Refleksywność	27
4. Kryterium liniowej niezależności	28
5. Interpretacja geometryczna rozwiązań układów liniowych jednorodnych	30
Ćwiczenia	31
§4. Formy dwuliniowe i kwadratowe	32
1. Odwzorowania wieloliniowe	32
2. Formy dwuliniowe	33
3. Transformacja macierzy formy dwuliniowej	34
4. Formy symetryczne i antysymetryczne	35
5. Formy kwadratowe	36
6. Postać kanoniczna formy kwadratowej	38

7. Formy kwadratowe rzeczywiste	40
8. Formy i macierze dodatnio określone	42
9. Postać kanoniczna formy antysymetrycznej	46
10. Pfaffian	48
Ćwiczenia	50

ROZDZIAŁ 2. OPERATORY LINIOWE 51

§1. Przekształcenia liniowe przestrzeni liniowych	51
1. Język przekształceń liniowych	51
2. Macierz przekształcenia liniowego	52
3. Wymiar jądra i obrazu	54
Ćwiczenia	55
§2. Algebra operatorów liniowych	56
1. Definicje i przykłady	56
2. Algebra operatorów	57
3. Macierze operatora liniowego w różnych bazach	60
4. Wyznacznik i ślad operatora liniowego	62
Ćwiczenia	65
§3. Podprzestrzenie niezmiennicze i wektory własne	66
1. Rzuty	66
2. Podprzestrzenie niezmiennicze	67
3. Wektory własne. Wielomian charakterystyczny	69
4. Kryterium diagonalizowalności	71
5. Istnienie podprzestrzeni niezmienniczych	74
6. Operator sprzężony	74
7. Operator ilorazowy	76
Ćwiczenia	77
§4. Postać kanoniczna Jordana	78
1. Twierdzenie Hamiltona–Cayleya	79
2. Postać kanoniczna Jordana: twierdzenie i wnioski	82
3. Podprzestrzenie pierwiastkowe	82
4. Przypadek operatora nilpotentnego	85
5. Jednoznaczność	86
6. Inne podejścia do PKJ	89
7. Inne postaci normalne	91
Ćwiczenia	92

ROZDZIAŁ 3. PRZESTRZENIE LINIOWE Z ILOCZYNEM SKALARNYM 95

§1. Przestrzenie euklidesowe	95
1. Rozważania heurystyczne i definicje	95
2. Podstawowe pojęcia metryczne	97
3. Ortogonalizacja	99
4. Izomorfizmy przestrzeni euklidesowych	103

5. Bazy ortonormalne i macierze ortogonalne	105
6. Przestrzenie symplektyczne	106
Ćwiczenia	109
§2. Przestrzenie unitarne	110
1. Formy hermitowskie	110
2. Związki metryczne	112
3. Ortogonalność	113
4. Macierze unitarne	114
5. Przestrzenie unormowane	116
Ćwiczenia	118
§3. Operatory liniowe na przestrzeniach z iloczynem skalarnym	119
1. Związki operatorów liniowych i form θ -liniowych	119
2. Klasy operatorów liniowych	121
3. Postać kanoniczna operatorów hermitowskich	125
4. Sprowadzanie formy kwadratowej do osi głównych	127
5. Sprowadzanie pary form kwadratowych do postaci kanonicznej	128
6. Postać kanoniczna izometrii liniowych	129
7. Operatory normalne	132
8. Operatory dodatnio określone	136
9. Rozkład biegunowy	138
Ćwiczenia	139
§4. Kompleksyfikacja i urzeczywistnienie	141
1. Struktura zespolona	141
2. Urzeczywistnienie	143
3. Kompleksyfikacja	146
4. Kompleksyfikacja $\rightarrow$ urzeczywistnienie $\rightarrow$ kompleksyfikacja	148
Ćwiczenia	149
§5. Wielomiany ortogonalne	150
1. Zagadnienie aproksymacji	150
2. Metoda najmniejszych kwadratów	151
3. Układy liniowe i metoda najmniejszych kwadratów	153
4. Wielomiany trygonometryczne	155
5. Uwaga o operatorach samosprężonych	156
6. Wielomiany Legendre'a	159
7. Ortogonalność z wagami	162
8. Wielomiany Czebyszewa (pierwszego rodzaju)	163
9. Wielomiany Hermite'a	164
Ćwiczenia	165

ROZDZIAŁ 4. PRZESTRZENIE PUNKTOWE AFINICZNE I EUKLIDESOWE 167

§1. Przestrzenie afiniczne	167
1. Definicja przestrzeni afinicznej	167
2. Izomorfizm	169
3. Współrzędne	170

4. Podprzestrzenie afiniczne	171
5. Współrzędne barycentryczne	174
6. Funkcje afiniczne i układy równań liniowych	178
7. Wzajemne położenie podprzestrzeni afinicznych	180
Ćwiczenia	182
§2. Przestrzenie (afiniczne) euklidesowe	182
1. Metryka euklidesowa	182
2. Odległość punktu od podprzestrzeni afinicznej	184
3. Odległość dwóch podprzestrzeni afinicznych	185
4. Wyznacznik Grama i objętość równoległościanu	187
Ćwiczenia	188
§3. Grupy i geometria	189
1. Grupa afiniczna	189
2. Izometrie przestrzeni euklidesowej	192
3. Grupa izometrii	194
4. Geometria liniowa odpowiadająca danej grupie	197
5. Przekształcenia afiniczne przestrzeni euklidesowej	200
6. Zbiory wypukłe	201
Ćwiczenia	204
§4. Przestrzenie z metryką nieokreśloną	204
1. Metryka nieokreślona	204
2. Izometrie pseudoeuklidesowe	205
3. Grupa Lorentza	206
4. Właściwa grupa Lorentza	208
Ćwiczenia	212
ROZDZIAŁ 5. KWADRYKI	213
§1. Funkcje kwadratowe	213
1. Funkcje kwadratowe na przestrzeni afinicznej	213
2. Punkty środkowe funkcji kwadratowej	215
3. Sprowadzanie funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej	216
4. Funkcje kwadratowe na przestrzeni euklidesowej	218
Ćwiczenia	221
§2. Kwadryki w przestrzeni afinicznej i euklidesowej	221
1. Ogólne pojęcie kwadryki	221
2. Środek kwadryki	224
3. Postacie kanoniczne kwadryk w przestrzeni afinicznej	224
4. Uwagi ogólne o rodzajach kwadryk	227
5. Kwadryki w przestrzeni euklidesowej	229
Ćwiczenia	232
§3. Przestrzenie rzutowe	233
1. Modele płaszczyzny rzutowej	233
2. Przestrzenie rzutowe wyższych wymiarów	236
3. Współrzędne jednorodne	237

4. Mapy afiniczne	238
5. Pojęcie rzutowego zbioru algebraicznego	239
6. Pełna grupa rzutowa	241
7. Geometria rzutowa	244
8. Dwustosunek	246
9. Zapis dwustosunku we współrzędnych	248
Ćwiczenia	251
§4. Kwadryki w przestrzeni rzutowej	252
1. Klasyfikacja	252
2. Przykłady i przedstawienia afiniczne kwadryk rzutowych	253
3. Przecięcie kwadryki rzutowej z prostą	254
4. Ogólne uwagi o kwadrykach rzutowych	255
Ćwiczenia	256
ROZDZIAŁ 6. TENSORY	257
§1. Wstępne informacje o tensorach	257
1. Pojęcie tensora	257
2. Iloczyn tensorowy	259
3. Współrzędne tensora	260
4. Tensory w różnych układach współrzędnych	263
5. Iloczyn tensorowy przestrzeni liniowych	265
Ćwiczenia	269
§2. Kontrakcja, symetryzacja i antysymetryzacja tensorów	270
1. Kontrakcja tensora	270
2. Tensor strukturalny algebry	273
3. Tensory symetryczne	276
4. Tensory antysymetryczne	280
5. Algebra tensorowa	282
Ćwiczenia	283
§3. Algebra zewnętrzna	284
1. Iloczyn zewnętrzny	284
2. Algebra zewnętrzna przestrzeni liniowej	285
3. Związek z wyznacznikami	289
4. Podprzestrzenie liniowe i p -wektory	291
5. Kryteria prostoty p -wektorów	293
Ćwiczenia	295
ROZDZIAŁ 7. ZASTOSOWANIA	297
§1. Norma operatorowa i funkcje operatorów liniowych	297
1. Norma operatora liniowego	297
2. Funkcje operatorów liniowych (macierzy)	301
3. Funkcja wykładnicza	302
4. Podgrupy jednoparametrowe pełnej grupy liniowej	305
5. Promień spektralny	309
Ćwiczenia	310

§2. Liniowe równania różniczkowe	311
1. Pochodna funkcji wykładniczej	311
2. Równania różniczkowe	313
3. Liniowe równanie różniczkowe zwyczajne stopnia n	314
§3. Wielościany wypukłe i programowanie liniowe	315
1. Sformułowanie problemu	315
2. Motywacja	315
3. Podstawowe pojęcia geometryczne	317
Ćwiczenia	320
§4. Macierze nieujemne	321
1. Motywacja ekonomiczna	321
2. Własności macierzy nieujemnych	322
3. Macierze stochastyczne	323
§5. Geometria Łobaczewskiego	327
1. Przestrzeń Łobaczewskiego	327
2. Izometrie przestrzeni Łobaczewskiego	329
3. Metryka Łobaczewskiego	331
4. Płaszczyzna Łobaczewskiego	333
§6. Problemy nierozwiązywalne	340
1. Problem Strassena	340
2. Rozkłady ortogonalne	340
3. Skończone płaszczyzny rzutowe	341
4. Bazy przestrzeni liniowych i kwadraty łacińskie	343
Odpowiedzi i wskazówki do ćwiczeń	344
Uwagi metodyczne	360
Pytania egzaminacyjne	360
Skorowidz	363