

# Spis treści

|                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------|----|
| Wstęp .....                                                     | XI |
| 1. Konstrukcja modelu matematycznego .....                      | 1  |
| 2. Relacje. Teoria preferencji konsumenta .....                 | 4  |
| 2.1. Zbiory. Relacje .....                                      | 4  |
| 2.2. Relacja preferencji .....                                  | 7  |
| 2.3. Zbiór budżetowy .....                                      | 13 |
| 2.4. Przykłady dwuargumentowych preferencji .....               | 16 |
| 2.5. Zadania .....                                              | 19 |
| 3. Liczby zespolone .....                                       | 25 |
| 3.1. Definicje i podstawowe własności .....                     | 25 |
| 3.2. Postać algebraiczna (kartezjańska) liczby zespolonej ..... | 26 |
| 3.3. Postać trygonometryczna liczby zespolonej .....            | 28 |
| 3.4. Postać wykładnicza liczby zespolonej .....                 | 32 |
| 3.5. Pierwiastkowanie liczb zespolonych .....                   | 33 |
| 3.6. Wielomiany zespolone .....                                 | 36 |
| 3.7. Zadania .....                                              | 38 |
| 4. Macierze. Wyznaczniki macierzy .....                         | 42 |
| 4.1. Macierze, działania na macierzach .....                    | 42 |
| 4.2. Wyznacznik macierzy kwadratowej .....                      | 46 |
| 4.3. Macierz odwrotna .....                                     | 50 |
| 4.3.1. Liniowa niezależność wektorów .....                      | 51 |
| 4.4. Rząd macierzy .....                                        | 52 |
| 4.5. Potęga i eksponens macierzy. Metoda Jordana .....          | 54 |
| 4.5.1. Wartości i wektory własne macierzy .....                 | 55 |
| 4.5.2. Diagonalizacja macierzy .....                            | 56 |
| 4.5.3. Potęgowanie, eksponens macierzy .....                    | 57 |
| 4.6. Zadania .....                                              | 61 |
| 5. Układy równań liniowych .....                                | 67 |
| 5.1. Pojęcia podstawowe .....                                   | 67 |
| 5.2. Układ Cramera .....                                        | 68 |

|           |                                                                             |            |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.3.      | Rozwiązanie dowolnego układu liniowego                                      | 70         |
| 5.4.      | Metoda badania rzędów macierzy                                              | 74         |
| 5.5.      | Układy jednorodne                                                           | 76         |
| 5.6.      | Zadania                                                                     | 77         |
| <b>6.</b> | <b>Modele równowagi rynkowej</b>                                            | <b>83</b>  |
| 6.1.      | Częściowa równowaga rynkowa                                                 | 84         |
| 6.1.1.    | Liniowy model rynku, przypadek jednego towaru                               | 84         |
| 6.1.2.    | Model nieliniowy, przypadek jednego towaru                                  | 86         |
| 6.2.      | Ogólna równowaga rynkowa                                                    | 86         |
| 6.2.1.    | Model rynku dwóch towarów                                                   | 87         |
| 6.2.2.    | Model rynku $n$ towarów                                                     | 87         |
| 6.3.      | Model input-output (nakładów i wyników). Model Leontiefa                    | 88         |
| 6.3.1.    | Równania bilansowe międzygałęziowej produkcji globalnej                     | 89         |
| 6.3.2.    | Równania bilansowe kosztów                                                  | 91         |
| 6.3.3.    | Współczynniki efektywności procesu gospodarczego                            | 94         |
| 6.3.4.    | Macierz struktury kosztów                                                   | 95         |
| 6.3.5.    | Model zamknięty                                                             | 98         |
| 6.4.      | Zastosowania                                                                | 100        |
| 6.4.1.    | Wyznaczenie poziomu produkcji. Opłacalność produkcji. Nakład pierwotny      | 100        |
| 6.4.2.    | Wyznaczenie produktu końcowego                                              | 100        |
| 6.4.3.    | Wzrost produktu końcowego                                                   | 101        |
| 6.4.4.    | Wzrost poziomu produkcji                                                    | 101        |
| 6.4.5.    | Określenie wielkości nakładów pracy                                         | 102        |
| 6.4.6.    | Analiza nakładów i wyników w przedsiębiorstwie                              | 103        |
| 6.4.7.    | Określenie poziomu produkcji firmy                                          | 104        |
| 6.4.8.    | Zapotrzebowanie produkcyjne na materiały i energię                          | 105        |
| 6.4.9.    | Plan wykorzystania maszyn i urządzeń                                        | 106        |
| 6.4.10.   | Określenie zatrudnienia                                                     | 106        |
| 6.5.      | Zadania                                                                     | 107        |
| <b>7.</b> | <b>Funkcje jednej zmiennej</b>                                              | <b>113</b> |
| 7.1.      | Granica funkcji jednej zmiennej                                             | 113        |
| 7.1.1.    | Asymptoty funkcji                                                           | 117        |
| 7.1.2.    | Ciągłość funkcji                                                            | 119        |
| 7.1.3.    | Pochodna funkcji                                                            | 122        |
| 7.2.      | Zastosowania pochodnych. Reguła de l'Hôpitala                               | 126        |
| 7.3.      | Monotoniczność, ekstrema lokalne i globalne funkcji                         | 127        |
| 7.4.      | Wypukłość i wklęsłość funkcji. Punkty przegięcia. Badanie przebiegu funkcji | 131        |
| 7.5.      | Ekonomiczne charakterystyki funkcji jednej zmiennej                         | 134        |
| 7.5.1.    | Wielkości przeciętne, krańcowe funkcji                                      | 134        |
| 7.5.2.    | Wartość jednostkowa funkcji                                                 | 136        |
| 7.5.3.    | Elastyczność funkcji                                                        | 138        |
| 7.5.4.    | Tempo wzrostu funkcji                                                       | 141        |
| 7.6.      | Zadania                                                                     | 142        |
| <b>8.</b> | <b>Rachunek całkowy</b>                                                     | <b>148</b> |
| 8.1.      | Całka nieoznaczona                                                          | 148        |
| 8.1.1.    | Całki nieoznaczone podstawowych funkcji elementarnych                       | 149        |
| 8.1.2.    | Metoda całkowania przez części i przez podstawienie                         | 150        |

|                                                                    |            |
|--------------------------------------------------------------------|------------|
| 8.1.3. Całki funkcji wymiernych                                    | 151        |
| 8.1.4. Całki funkcji trygonometrycznych                            | 155        |
| 8.1.5. Całki wybranych funkcji niewymiernych                       | 157        |
| 8.2. Całka oznaczona                                               | 158        |
| 8.3. Całka niewłaściwa                                             | 161        |
| 8.4. Zastosowania w ekonomii                                       | 163        |
| 8.5. Zadania                                                       | 169        |
| <b>9. Funkcje wielu zmiennych</b>                                  | <b>174</b> |
| 9.1. Pojęcia wstępne                                               | 174        |
| 9.2. Granica funkcji w punkcie                                     | 176        |
| 9.2.1. Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych                | 177        |
| 9.2.2. Gradient. Pochodna kierunkowa                               | 179        |
| 9.2.3. Różniczka funkcji                                           | 181        |
| 9.2.4. Ekstrema lokalne funkcji                                    | 182        |
| 9.2.5. Ekstremum warunkowe funkcji                                 | 185        |
| 9.2.6. Ekstremum globalne funkcji wielu zmiennych                  | 186        |
| 9.3. Funkcje uwikłane                                              | 187        |
| 9.4. Ekonomiczne charakterystyki funkcji wielu zmiennych           | 189        |
| 9.4.1. Prosty model wymiany. Prostokąt Edgewortha                  | 194        |
| 9.5. Zadania                                                       | 197        |
| <b>10. Funkcje wypukłe, wklęsłe, quasi-wypukłe i quasi-wklęsłe</b> | <b>202</b> |
| 10.1. Funkcje wypukłe i funkcje wklęsłe                            | 202        |
| 10.2. Funkcje quasi-wypukłe oraz quasi-wklęsłe                     | 209        |
| 10.3. Zadania                                                      | 216        |
| <b>11. Funkcje dyskretne</b>                                       | <b>219</b> |
| 11.1. Pojęcia podstawowe                                           | 219        |
| 11.2. Rachunek różnicowy                                           | 219        |
| 11.3. Operator antyróżnicowy                                       | 223        |
| 11.4. Ekonomiczne charakterystyki funkcji dyskretnych              | 228        |
| 11.5. Zadania                                                      | 230        |
| <b>12. Zagadnienia optymalizacji wypukłej</b>                      | <b>232</b> |
| 12.1. Wiadomości wstępne                                           | 232        |
| 12.1.1. Sformułowanie zagadnienia                                  | 233        |
| 12.1.2. Optymalizacja funkcji jednej zmiennej                      | 235        |
| 12.1.3. Optymalizacja funkcji wielu zmiennych                      | 236        |
| 12.2. Metoda nieokreślonych mnożników Lagrange'a                   | 238        |
| 12.2.1. Program nieliniowy w postaci standardowej                  | 245        |
| 12.3. Warunki i twierdzenie Karusha–Kuhna–Tuckera                  | 245        |
| 12.4. Zastosowania                                                 | 251        |
| 12.4.1. Prosty model wymiany, prostokąt (skrzynka) Edgewortha      | 251        |
| 12.4.2. Model Arrowa–Hurwicza                                      | 253        |
| 12.4.3. Model Arrowa–Debreu–McKenziego                             | 257        |
| 12.5. Zadania                                                      | 264        |
| <b>13. Funkcja użyteczności, popytu, podaży i kosztu</b>           | <b>268</b> |
| 13.1. Funkcja użyteczności                                         | 268        |

|                                                                                                |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 13.1.1. Przykłady funkcji użyteczności                                                         | 268        |
| 13.1.2. Podstawowe własności funkcji użyteczności                                              | 271        |
| 13.1.3. Charakterystyki funkcji użyteczności                                                   | 272        |
| 13.2. Maksymalizacja użyteczności konsumpcji (MUK)                                             | 276        |
| 13.3. Funkcja popytu konsumenta                                                                | 279        |
| 13.3.1. Charakterystyki funkcji popytu                                                         | 280        |
| 13.4. Funkcja kosztu                                                                           | 284        |
| 13.5. Zadania                                                                                  | 285        |
| <b>14. Funkcja produkcji</b>                                                                   | <b>291</b> |
| 14.1. Skalna funkcja produkcji                                                                 | 291        |
| 14.1.1. Standardowe założenia o skalarnej funkcji produkcji (postulaty funkcji produkcji)      | 292        |
| 14.1.2. Przykłady funkcji produkcji                                                            | 293        |
| 14.2. Funkcja produkcji CES                                                                    | 294        |
| 14.3. Szczególne przypadki funkcji CES                                                         | 300        |
| 14.3.1. Dwuargumentowa liniowa funkcja produkcji                                               | 300        |
| 14.3.2. Dwuargumentowa funkcja produkcji Cobba-Douglasa                                        | 302        |
| 14.3.3. Dwuargumentowa funkcja produkcji Koopmansa-Leontiefa                                   | 303        |
| 14.4. Inne funkcje produkcji                                                                   | 305        |
| 14.5. Długookresowa strategia przedsiębiorstwa (DSR)                                           | 306        |
| 14.5.1. Maksymalizacja zysku (MZ)                                                              | 307        |
| 14.5.2. Minimalizacja kosztów (MK)                                                             | 309        |
| 14.5.3. Optymalizacja wielkości produkcji (OP)                                                 | 310        |
| 14.6. Krótkookresowa strategia przedsiębiorstwa (KSR)                                          | 312        |
| 14.7. Zadania                                                                                  | 314        |
| <b>15. Równania różniczkowe</b>                                                                | <b>320</b> |
| 15.1. Równania różniczkowe rzędu pierwszego                                                    | 321        |
| 15.1.1. Metoda uzmienniania stałej                                                             | 324        |
| 15.1.2. Metoda przewidywań                                                                     | 325        |
| 15.1.3. Równanie Bernoulliego                                                                  | 326        |
| 15.2. Równania różniczkowe rzędu drugiego                                                      | 327        |
| 15.2.1. Równania liniowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach                              | 330        |
| 15.3. Równanie różniczkowe $k$ -go rzędu o stałych współczynnikach                             | 331        |
| 15.4. Stabilność równań różniczkowych. Linearyzacja                                            | 336        |
| 15.5. Zastosowania równań różniczkowych                                                        | 342        |
| 15.5.1. Procenty składane                                                                      | 342        |
| 15.5.2. Model wzrostu Domara                                                                   | 342        |
| 15.5.3. Model Solowa                                                                           | 345        |
| 15.5.4. Rozwój populacji. Model Malthusa                                                       | 348        |
| 15.5.5. Model Verhulsta (logistyczny). Rozwój populacji z uwzględnieniem pojemności środowiska | 349        |
| 15.5.6. Model Gompertza                                                                        | 351        |
| 15.5.7. Model Ludwiga rozwoju populacji                                                        | 352        |
| 15.5.8. Badanie przyczyny rozwodów                                                             | 353        |
| 15.5.9. Prosty model rynku                                                                     | 353        |
| 15.5.10. Model rynku z określoną tendencją zmiany cen                                          | 354        |
| 15.5.11. Zależności między bezrobociem i inflacją, model Phillipsa                             | 356        |
| 15.6. Zadania                                                                                  | 358        |

|                                                                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>16. Równania różnicowe</b>                                                                                  | 365 |
| 16.1. Równania różnicowe. Podstawy                                                                             | 365 |
| 16.1.1. Liniowe równanie różnicowe rzędu pierwszego                                                            | 369 |
| 16.1.2. Liniowe równanie rzędu $k$ -go o stałych współczynnikach                                               | 371 |
| 16.1.3. Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego o stałych współczynnikach. Metoda uzmienniania stałych | 374 |
| 16.1.4. Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego o stałych współczynnikach. Metoda przewidywań          | 376 |
| 16.2. Transformata $\mathcal{Z}$                                                                               | 378 |
| 16.3. Stabilność i linearyzacja nieliniowych równań różnicowych                                                | 381 |
| 16.4. Zastosowania równań różnicowych                                                                          | 383 |
| 16.4.1. Przyrost populacji w ujęciu dyskretnym. Model Malthusa                                                 | 383 |
| 16.4.2. Dyskretny model Verhulsta                                                                              | 384 |
| 16.4.3. Model Fibonacciego                                                                                     | 385 |
| 16.4.4. Model pajęczynowy                                                                                      | 386 |
| 16.4.5. Rynek z określoną tendencją zmiany cen                                                                 | 388 |
| 16.4.6. Model dochodu narodowego Samuelsona (model mnożnika i akceleratora)                                    | 389 |
| 16.4.7. Model przepustowości. Teoria kolejek                                                                   | 390 |
| 16.5. Zadania                                                                                                  | 393 |
| <b>17. Układy równań różniczkowych zwyczajnych</b>                                                             | 397 |
| 17.1. Układy równań różniczkowych. Wiadomości wstępne                                                          | 397 |
| 17.1.1. Metoda eliminacji                                                                                      | 397 |
| 17.2. Układy równań różniczkowych liniowych                                                                    | 399 |
| 17.2.1. Rozwiązanie ogólne układu jednorodnego                                                                 | 402 |
| 17.2.2. Układy równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach. Metoda Eulera                         | 406 |
| 17.3. Stabilność i asymptotyczna stabilność układów równań różniczkowych                                       | 411 |
| 17.4. Linearyzacja nieliniowych układów równań różniczkowych                                                   | 414 |
| 17.5. Zastosowania układów równań różniczkowych                                                                | 417 |
| 17.5.1. Ciągły model Leontiefa nakładów i wyników w procesie produkcji                                         | 417 |
| 17.5.2. Model nakładów i wyników obejmujący akumulację zapasów                                                 | 418 |
| 17.5.3. Model Arrowa–Hurwicza                                                                                  | 419 |
| 17.5.4. Model Arrowa–Debreu–McKenziego                                                                         | 420 |
| 17.5.5. Model inflacji i polityki monetarnej Obst                                                              | 422 |
| 17.5.6. Model Lotki–Volterry (model konkurencji)                                                               | 422 |
| 17.5.7. Uogólniony model Lotki–Volterry                                                                        | 424 |
| 17.5.8. Model epidemii Kermacka–McKendricka                                                                    | 425 |
| 17.5.9. Model „Romeo i Julia”                                                                                  | 427 |
| 17.5.10. Układy o jednym (wielu) wejściu i wyjściu                                                             | 428 |
| 17.6. Zadania                                                                                                  | 428 |
| <b>18. Układy równań różnicowych</b>                                                                           | 434 |
| 18.1. Układy równań różnicowych. Wiadomości wstępne                                                            | 434 |
| 18.1.1. Metoda eliminacji                                                                                      | 434 |
| 18.1.2. Układy równań różnicowych liniowych                                                                    | 436 |
| 18.1.3. Metoda uzmienniania stałych wyznaczania rozwiązania szczególnego układu niejednorodnego                | 439 |
| 18.2. Układy równań różnicowych liniowych o stałych współczynnikach                                            | 440 |
| 18.3. Stabilność rozwiązania układu równań różnicowych                                                         | 444 |

|                                                                          |            |
|--------------------------------------------------------------------------|------------|
| 18.4. Zastosowania układów równań różnicowych . . . . .                  | 446        |
| 18.4.1. Model rynku . . . . .                                            | 446        |
| 18.4.2. Dyskretny model Arrowa–Hurwicza . . . . .                        | 446        |
| 18.4.3. Dyskretny model Leontiefa . . . . .                              | 447        |
| 18.4.4. Model nakładów i wyników obejmujący akumulację zapasów . . . . . | 448        |
| 18.4.5. Dyskretny model oddziałujących populacji . . . . .               | 448        |
| 18.4.6. Układy o jednym (wielu) wejściu i wyjściu . . . . .              | 452        |
| 18.5. Zadania . . . . .                                                  | 453        |
| <b>Bibilografia . . . . .</b>                                            | <b>457</b> |
| <b>Wykaz symboli . . . . .</b>                                           | <b>459</b> |
| <b>Skorowidz . . . . .</b>                                               | <b>461</b> |

Ekonomia matematyczna zajmuje się badaniem szeroko pojętych zjawisk gospodarczych przy użyciu zaawansowanych technik matematycznych, takich jak analiza szeregów czasowych czy programowanie dynamiczne. Książka zawiera zagadnienia nieomawiane w innych publikacjach z dziedziny:

- uogólnienia wypukłości oraz ich zastosowanie w problematyce ekonomicznej,
- pojęcie funkcji dyskretnych,
- równania i układy równań różnicowych, coraz szerzej stosowane w naukach ekonomicznych.

W podręczniku, oprócz treści teoretycznych, znajdują się również zadania z przykładowymi rozwiązaniami oraz zadania do samodzielnego rozwiązania.

Podręcznik przeznaczony jest dla studentów i wykładowców kierunków matematycznych i ekonomicznych. Polecany zwłaszcza studentom specjalności: matematyka finansowa i ubezpieczeniowa, matematyka ekonomiczna, zastosowania matematyki.