ENCYKLOPEDIA
MATEMATYKA

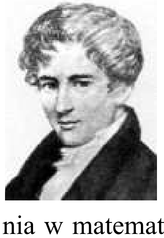
cz. 1 Hasła w porządku alfabetycznym
cz. 2 Dodatek encyklopedyczny:
Tabele
Wzory przydatne na maturze
Matematyka w tablicach

GREG WYDAWNICTWO
Kraków

a

ABAK – pierwszy model liczydła wynaleziony przez starożytnych Greków, używany do XVIII wieku w Rzymie i Europie Zachodniej. Miał postać tablicy podzielonej na kolumny. W każdej z nich zaznaczano odpowiednią liczbą znaków (np. kresek, kamyków) liczbę jednostek danego rzędu – jedności, dziesiątek, setek, itd. Pusta kolumna oznaczała zero. Działania na liczbach wykonywane były poprzez przenoszenie znaków z jednej kolumny do drugiej. Z czasem kreski i kamyki zastąpiono apeksami – numerowanymi żetonami, uchodzącymi dziś za pierwowzory cyfr.

ABEL NIELS HENRIK (1802–1829)



– norweski matematyk; dokonania:
– wykazał niemożności rozwiązania w postaci ogólnej równań stopnia piątego i wyższych przez pierwiastki,
– sformułował problem istnienia w matematyce: zanim zacznie się poszukiwać formuł, twierdzeń i faktów, należy najpierw dowieść, że one istnieją,
– jest współtwórcą podstaw teorii funkcji algebraicznych i eliptycznych,
– wykazał istnienie funkcji, których całek nie można wyrazić za pomocą funkcji elementarnych.

AKSJOMAT – inaczej pewnik; zdanie przyjęte bez dowodu jako wyjściowe twierdzenie danego systemu dedukcyjnego, z którego można wyprowadzać dalsze twierdzenia, stosując określone reguły wnioskowania. Zbiór aksjomatów danego systemu dedukcyjnego nazywamy aksjomatyką; a. określa własności pojęć pierwotnych i zależności pomiędzy nimi. Współczesna matematyka wymaga niesprzeczności teorii opartej na danym zbiorze aksjomatów.

AKSJOMAT CIĄGŁOŚCI – jeden z aksjomatów teorii liczb rzeczywistych. Mówi, że każdy niepusty i ograniczony z góry podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma kres górny. Analogicznie: każdy niepusty i ograniczony z dołu podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma kres dolny.

AKSJOMATYKA → **aksjomat**

AKSJOMATYKA PEANO – zbiór aksjomatów definiujących formalnie zbiór liczb natural-

A

nych. Został on zaproponowany przez G. Peano pod koniec XIX wieku. Niech $\mathbb{N}$ będzie pewnym zbiorem, spełniającym poniższe warunki (aksjomaty):

- 1 należy do zbioru $\mathbb{N}$, tzn. $1 \in \mathbb{N}$.
- Na zbiorze $\mathbb{N}$ określona jest pewna funkcja n, zwana następnikiem, tzn. $\bigwedge_{a \in \mathbb{N}} n(a) \in \mathbb{N}$.
- 1 nie jest następnikiem żadnego elementu $\mathbb{N}$.
- Różne elementy zbioru $\mathbb{N}$ mają różne następniki, tzn. $\bigwedge_{a \in \mathbb{N}} \bigwedge_{b \in \mathbb{N}} a \neq b \Rightarrow n(a) \neq n(b)$.
- Niech 1 ma pewną własność A. Jeśli z faktu, że dowolny element $\mathbb{N}$ ma własność A, wynika że jego następnik ma własność A, to każdy element $\mathbb{N}$ ma też własność A (zasada indukcji matematycznej). Jeśli $A \subset \mathbb{N}$, $1 \in A$ oraz $\bigwedge_{a} a \in A \Rightarrow n(a) \in A$, to $A = \mathbb{N}$.

Zbiór $\mathbb{N}$ zdefiniowany w powyższy sposób jest zbiorem liczb naturalnych (w którym najmniejszy element jest równy 1). W podobny sposób można zdefiniować liczby naturalne, rozumiane jako liczby całkowite dodatnie wraz z 0.

ALCHWARIZMI (ok. 780 – ok. 850) – uczony arabski, autor prac naukowych z zakresu matematyki i astronomii. W dziele *O liczbach i figurach* przedstawił hinduski system liczenia, tzw. dziesiętny układ pozycyjny. Dzięki temu w Europie Zachodniej rozpowszechniły się cyfry hinduskie, zwane tu powszechnie arabskimi. Dał początki nowej dziedzinie matematyki – algebrze.

ALEF ZERO – liczba kardynalna oznaczająca moc zbioru liczb naturalnych. Zwyczajowo oznacza się ją symbolem $\aleph_0$. Można wykazać, że mocą zbioru liczb wymiernych jest również $\aleph_0$.

ALEMBERT JEAN LE ROND D' (1717–83)

– matematyk, filozof i fizyk; jeden ze współtwórców i współredaktorów *Wielkiej encyklopedii francuskiej*, członek Akademii Francuskiej, propagator idei oświeceniowych. Empirysta, zwolennik filozofii antyspekulatywnej i materialistycznej interpretacji przyrody. Twórca tzw. zasady d'Alemberta. W zakresie matematyki największe znaczenie mają jego prace z teorii równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych.

ALGEBRA – słowo pochodzące od arabskiego al-dżebr – „krępowanie". Dział matematyki zajmujący się badaniem własności → działań określonych na różnych obiektach (np.: liczbach, wektorach, macierzach itp.). Pierwotnie algebra zajmowała się rozwiązywaniem równań. Wraz ze swoim rozwojem a. zajęła się także badaniem własności działań wyrażanych za pomocą rachunku literowego (→ wyrażenia algebraiczne), czyli równań, w których zamiast współczynników liczbowych są litery.

Obecnie a. bada własności różnych → struktur algebraicznych. Najbardziej znane struktury to: → grupa, → pierścień, → ciało. Od nazw struktur pochodzą nazwy badających je działów a., takich jak a. grup, a. pierścieni, → a. liniowa. A. uniwersalna to dział a. zajmujący się badaniem struktur algebraicznych, na które nie narzucamy żadnych ograniczeń.

ALGEBRA LINIOWA – dział → algebry zajmujący się badaniem własności → przestrzeni wektorowych. Najbardziej znanym zastosowaniem a.l. jest rozwiązywanie układów równań liniowych.

ALGEBRAICZNA POSTAĆ LICZBY ZESPOLONEJ – przedstawienie liczby zespolonej w postaci $a + bi$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi, natomiast i jest → jednostką urojoną. → liczby zespolone.

ALGORYTM – zbiór określonych reguł postępowania realizowanych według ustalonego porządku, który umożliwia rozwiązanie konkretnego zadania (np. metoda rozwiązywania równania liniowego, kwadratowego). A. powinien być precyzyjny i uniwersalny tak, by posługiwanie się nim polegało na automatycznym wykonywaniu konstrukcji/schematów. Algorytm musi także posiadać własność stopu, to znaczy, że dla dowolnych danych wejściowych musi się zatrzymać po skończonej liczbie kro-

- jeśli x nie jest liczbą całkowitą, to $[x] = \lceil x \rceil - 1$, gdzie $\lceil x \rceil$ jest → sufitem liczby x.

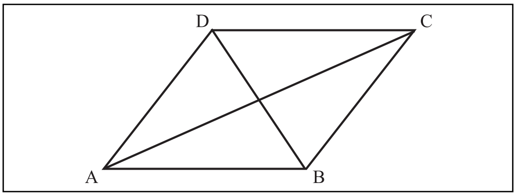
Część całkowita l. rzeczywistej x jest często nazywana podłogą z liczby x i oznaczana symbolem $\lfloor x \rfloor$.

CZĘŚĆ UŁAMKOWA LICZBY RZECZYWISTEJ (mantysa liczby rzeczywistej) – Różnica między daną → liczbą rzeczywistą a jej → częścią całkowitą. Część ułamkowa liczby x oznaczana jest przez $x - [x]$, albo przez $\{x\}$. Jest ona zawsze liczbą nieujemną mniejszą od 1. Część ułamkowa liczby całkowitej jest równa 0. Na przykład $\{5\} = 0$; $\{3{,}25\} = 0{,}25$; $\{-9{,}755\} = 0{,}245$.

CZĘŚĆ WSPÓLNA ZBIORÓW – wynik działania operacji mnożenia mnogościowego. → mnożenie mnogościowe.

CZWOROBOK → **czworokąt**

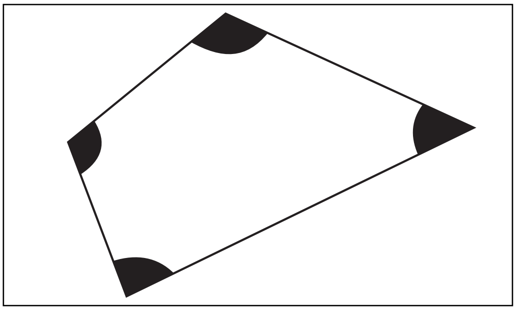
CZWOROKĄT – domknięta, płaska → figura geometryczna ograniczona → krzywą łamaną zwyczajną zamkniętą, o czterech bokach; inaczej: → wielokąt o czterech bokach. Boki c. tworzą dwie pary boków przeciwległych, to znaczy takich, że nie mają ze sobą żadnego punktu wspólnego. Analogicznie, wierzchołki nie należące do tego samego boku nazywane są wierzchołkami przeciwległymi. Każdy c. posiada dwie przekątne, czyli odcinki łączące przeciwległe wierzchołki. Co najmniej jedna przekątna zawiera się w całości w c. (patrz Ryc. 8). Kątem wewnętrznym c. nazywany jest kąt płaski, którego wierzchołkiem jest wierzchołek c., ramionami są proste zawierające boki c. wychodzące z tego wierzchołka oraz dla którego istnieje otoczenie wierzchołka takie, że wszystkie punkty kąta zawarte w tym otoczeniu są punktami wielokąta. Suma miar kątów wewnętrznych w każdym c. jest równa 2π, czyli 360 stopni.



Ryc. 8 **Czworokąt *ABCD* i jego przekątne *BD* i *AC***

W c. można wpisać okrąg tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków są równe, tzn. $(w + x) + (z + y) = (w + z) + (x + y)$ (patrz Ryc. 10). Na c. można opisać okrąg tylko wtedy, gdy suma miar jego przeciwległych kątów wynosi 180 stopni, czyli $\alpha + \beta = 180°$.

C. o wszystkich czterech kątach wypukłych nazywany jest c. wypukłym. W c. wypukłych odcinki łączący dwa dowolne punkty c. zawsze w całości należą do tego c. W c. wypukły można wpisać → okrąg wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków są równe. Na c. wypukłym można opisać okrąg, gdy suma miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych jest równa π, czyli gdy wynosi 180 stopni (Ryc. 10). Szczególnymi przykładami czworokątów są → kwadrat, → prostokąt, → romb, → równoległobok, → trapez, → deltoid.



Ryc. 9 **Czworokąt i jego kąty wewnętrzne**

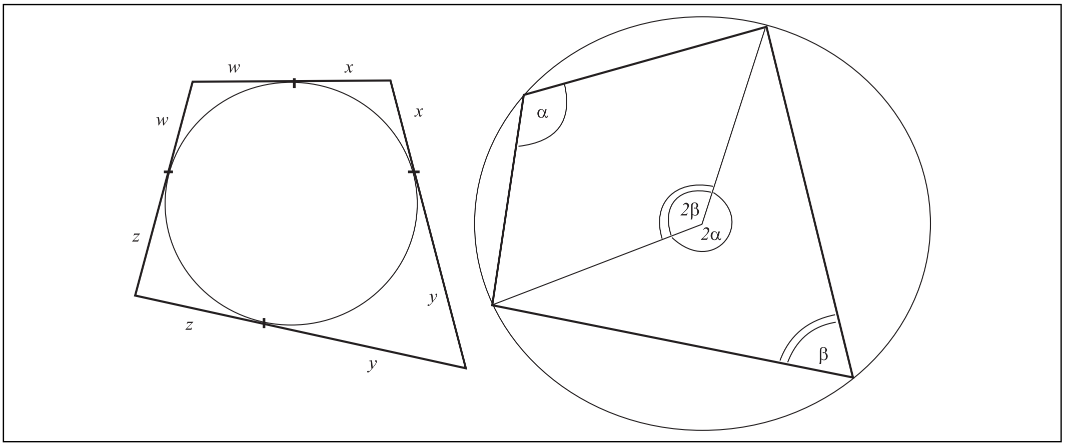
CZWOROŚCIAN – wielościan o czterech ścianach będących trójkątami. Jeżeli trójkąty te są równoboczne, mówimy o c. foremnym.

CZWOROŚCIAN FOREMNY – inaczej tetraedr, czworościan, którego ścianami są trójkąty równoboczne. Jego pole powierzchni obliczamy ze wzoru

$$\boxed{P = a^2\sqrt{3}\,j^2,}$$

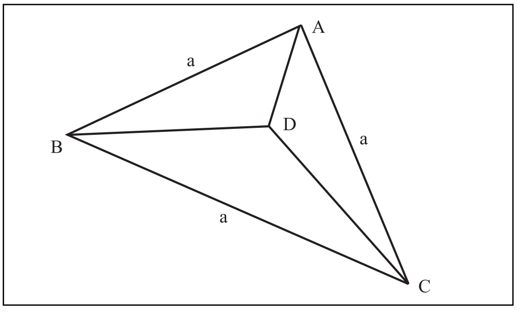
zaś objętość ze wzoru

$$\boxed{V = \frac{a^2\sqrt{2}}{12}\,j^3,}$$



Ryc. 10 **Okrąg wpisany w czworokąt i opisany na czworokącie**

gdzie a jest długością krawędzi czworościanu, a j oznacza jednostkę miary (np. cm).



Ryc. 11 **Czworościan**

CZYNNIK – argument → mnożenia.

CZYNNIK LINIOWY – c.l. → wielomianu f nazywamy dowolny wielomian dzielący f bez reszty. Przy założeniu, że c.l. są postaci $x + c$ (to założenie eliminuje c.l. będące wzajemnie swoimi dzielnikami) wielomian ma nie więcej c.l. niż wynosi jego stopień. Aby znaleźć wszystkie c.l. danego wielomianu, wystarczy znaleźć jego wszystkie miejsca zerowe (→ twierdzenie Bezouta).

Przykład
Wielomian $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$ posiada dwa c.l. $x - 1$ oraz $x + 2$. Łatwo sprawdzić, że $g(x) = (x^2 + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$.

CZYNNIK PIERWSZY LICZBY NATURALNEJ – dowolna liczba pierwsza, będąca dzielnikiem danej liczby naturalnej. Na przykład czynnikami pierwszymi liczby 99 są liczby 3 i 11; dodatkowo czynnik 3 występuje w liczbie 99 w drugiej potędze. Czynnikiem pierwszym liczby pierwszej n jest liczba n. Każdą liczbę złożoną da się przedstawić w postaci iloczynu skończonej ilości czynników pierwszych. Takie przedstawienie nazywamy → rozkładem liczby złożonej na czynniki pierwsze. Jest on jednoznaczny, tzn. dwa rozkłady liczby n na czynniki pierwsze składają się z tych samych liczb pierwszych; mogą różnić się jedynie kolejnością wypisania czynników.

CZYNNIK PROCENTOWY – przy zmianie wartości x o p procent, c.p. nazywamy wartość jaką osiągnęłaby przy takiej samej zmianie jedynka. C.p. jest równy

$$\boxed{c = 1 \pm p/100.}$$

Zauważmy, że jeżeli wartość x po zmianie o p procent wynosi y, to $y = c \cdot x$ (stąd nazwa).

Przykład
Jeżeli cena chleba wzrosła o 10% to c.p. wynosi $c = 1 + 10/100 = 1{,}1$. Jeżeli więc chleb przed podwyżką kosztował 1,5 zł, to po podwyżce będzie kosztował 1,5 zł $\cdot$ 1,1 = 1,65 zł.

d

DARBOUX JEAN GASTON (1842–1917) – francuski matematyk, autor prac z zakresu geometrii różniczkowej i równań różniczkowych.

DECY – (symbol: d) – przedrostek jednostki miary oznaczający mnożnik równy 10^{-1} (jedna dziesiąta). Jeśli przed jednostką miary stoi przedrostek decy, oznacza to, że miarę tę należy pomnożyć przez 10^{-1}. Na przykład 7 decymetrów to $7 \cdot 10^{-1}$ metrów, czyli 70 centymetrów: 7 dm = 0,7 m = 70 cm. Przedrostek ten bywa łączony zwykle z jednostką odległości (1 dm = 10 cm = 0,1 m) i natężenia dźwięku (1 dB – jedna decybela).

DECYLION – liczba naturalna postaci 10^{60}, czyli milion nonilionów (wg nazewnictwa w Polsce); liczba naturalna postaci 10^{33}, czyli tysiąc nonilionów (wg nazewnictwa amerykańskiego). → liczby giganty.

DEDEKIND JULIUS WILHELM RICHARD (1831–1916) – niemiecki matematyk zajmujący się algebrą, teorią liczb i analizą matematyczną. Od 1880 członek niemieckiej Akademii Nauk. Jest twórcą ścisłej teorii liczb rzeczywistych.

DEDUKCJA – rozumowanie, wnioskowanie, w którym z danych przesłanek wyprowadza się logicznie wniosek. Jeżeli z przyjętych założeń początkowych wyprowadza się nowe twierdzenia poprzez wnioskowanie dedukcyjne, to mówimy o metodzie dedukcyjnej – metodzie budowania systemu dedukcyjnego. Konstruowanie systemów dedukcyjnych oraz analiza teorii wyznaczonych przez te systemy jest jednym z zadań logiki matematycznej.

DEKA – (symbol: da) – przedrostek jednostki miary oznaczający mnożnik równy 10^{1} (dziesięć). Jeśli przed jednostką miary stoi przedrostek deka, oznacza to, że miarę tę należy pomnożyć przez 10^{1}. Na przykład 7 dekagramów to $7 \cdot 10^{1}$ gramów, czyli 70 gramów: 7 dag = 70 g. Przedrostka tego używa się zwykle w połączeniu z jednostką wagi, jaką jest 1 gram (dekagramy).

DELTA – czwarta litera alfabetu greckiego. Małą literę δ zwykle stosuje się w planimetrii do oznaczenia kąta, dużą zaś do oznaczenia

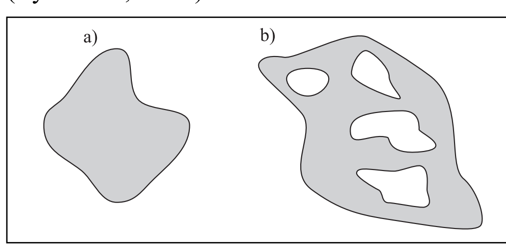
O

OBRAZ JEDNOKŁADNY PUNKTU *X* – punkt X', dla którego zachodzi równość $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$, gdzie $k \in R \setminus \{0)$ jest skalą jednokładności J, zaś O jej środkiem. Można zapisać $J_O^k(X) = X'$. Jeżeli punkt $X = (x, y)$ znajduje się w układzie współrzędnych, to jego obrazem w jednokładności o skali k i środku $O = (a, b)$ jest punkt $X' = (k(x - a) + a, k(y - b) + b)$. O punktach X i X' mówimy, że są jednokładne.

OBRÓT PŁASZCZYZNY – inaczej o. dookoła punktu S o kąt skierowany $\vec{\alpha}$ – przekształcenie płaszczyzny, w którym obrazem punktu S jest ten sam punkt S, zaś obrazem każdego punktu X różnego od S jest punkt X' spełniający warunki: 1) kąt $\overrightarrow{XSX'}$ jest równy kątowi $\vec{\alpha}$, 2) $|SX'| = |SX|$. Jeżeli punkt $X = (x, y)$ znajduje się w układzie współrzędnych to $X' = (x\cos\alpha - y\sin\alpha, y\cos\alpha + x\sin\alpha)$. O. p. jest złożeniem dwóch symetrii osiowych o osiach przecinających się w punkcie S.

OBRÓT PRZESTRZENI – inaczej o. dookoła prostej l – przekształcenie przestrzeni, w którym prosta l zwana osią obrotu jest zbiorem punktów stałych tego przekształcenia, a każda płaszczyzna prostopadła do osi obrotu jest obracana o taki sam kąt. O. p. jest złożeniem dwóch symetrii płaszczyznowych o płaszczyznach przecinających się wzdłuż osi l.

OBSZAR – podzbiór przestrzeni topologicznej, który jest zbiorem spójnym i otwartym. Jeżeli jego brzeg jest spójny to mówimy o o. jednospójnym (Ryc. 122a), jeśli zaś brzeg ma n składowych, mówimy o obszarze n-spójnym (Ryc. 122b, $n = 5$).



Ryc. 122 **Obszary: a) jednospójny, b) 5-spójny**

OBSZAR JEDNOSPÓJNY → **obszar**

OBSZAR *n*-SPÓJNY → **obszar**

ODCHYLENIE PRZECIĘTNE – o.p. zmiennej losowej X to → wartość oczekiwana nowej zmiennej losowej $Y = |X - EX|$. O.p. zmiennej losowej X jest więc wartością oczekiwaną bezwzględnych odchyleń wartości tej zmiennej od jej wartości oczekiwanej.

ODCHYLENIE STANDARDOWE – miara zmienności dla zbioru wartości pewnej cechy. Obok → wartości oczekiwanej i → wariancji jedno z najczęściej używanych pojęć w statystyce. Odchylenie standardowe wartości cechy w populacji oznacza się przez σ:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}},}$$

gdzie N jest liczebnością populacji, a μ – wartością oczekiwaną.

Gdy nie jest możliwe obliczenie odchylenia standardowego w populacji, do jego obliczenia używa się → estymatora odchylenia standardowego, obliczanego jako pierwiastek z estymatora wariancji, $\sqrt{s^2}$.

Ogólnie, dla zmiennej losowej X jej odchyleniem standardowym jest wartość

$$\boxed{\sqrt{D^2X} = \sqrt{E(X - EX)^2} = \sqrt{E(X^2) - (EX)^2},}$$

gdzie D^2X oznacza → wariancję zmiennej losowej X.

Odchylenie standardowe wyrażone jest w tych samych jednostkach, co wartości cechy.

Dla odchylenia standardowego cechy o → rozkładzie normalnym zachodzi tzw. prawo trzech sigm, mówiące, że:
ok. 68% wartości cechy leży w odległości mniejszej niż 1σ od wartości oczekiwanej,
ok. 95,5% wartości cechy leży w odległości mniejszej niż 2σ od wartości oczekiwanej,
ok. 99,7% wartości cechy leży w odległości mniejszej niż 3σ od wartości oczekiwanej.

Innymi słowy, prawo to stwierdza, że prawie wszystkie wartości danej cechy mieszczą się w odległości 3σ od wartości oczekiwanej dla tej cechy.

W ogólnym przypadku, tzn. wtedy, gdy rozkład badanej cechy nie jest znany, zachodzi nierówność Czebyszewa, mówiąca, że dla $k > 1$ prawdopodobieństwo tego, że wartość cechy wybranej u losowego osobnika populacji różni się od wartości oczekiwanej o $\pm k\sigma$ wynosi co najwyżej $\frac{1}{k^2}$. Na przykład, z nierówności Czebyszewa wynika, że dla cechy o dowolnym rozkładzie poza przedziałem $\langle \mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma \rangle$ leży co najwyżej $\frac{1}{2^2}100\% = 25\%$ wartości cechy.

Przykład

Obliczymy odchylenie standardowe dla liczby wyrzuconych oczek na kostce 6-ściennej. Niech X będzie zmienną losową przyjmującą jedną z wartości 1, 2, 3, 4, 5, 6. Zakładamy, że prawdopodobieństwo wyrzucenia każdej liczby oczek jest jednakowo prawdopodobne i wynosi $\frac{1}{6}$. → Wartość oczekiwana zmiennej losowej X wynosi $EX = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3{,}5$. Ponieważ zbiorem wartości zmiennej losowej X^2 jest zbiór $\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2\}$ oraz $P(X^2 = i^2) = \frac{1}{6}$ dla każdego $i = 1, 2,..., 6$, więc odchylenie standardowe wynosi

$$\sqrt{D^2X} = \sqrt{E(X^2) - (EX)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) - (3{,}5)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1{,}7.$$

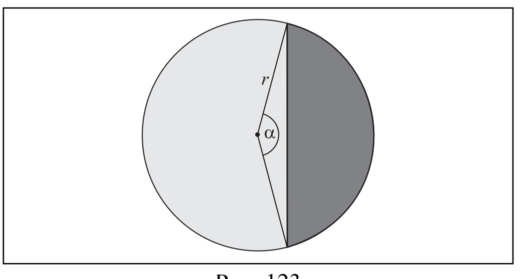
ODCIĘTA – pierwsza oś kartezjańskiego układu współrzędnych na płaszczyźnie. Zazwyczaj pozioma, oznaczana literą x. Odciętą nazywa się też pierwszą współrzędną punktu w układzie współrzędnych.

ODCINEK $\overline{AB}$ – zbiór dokładnie tych wszystkich punktów prostej zawierającej punkty A i B, które leżą pomiędzy dwoma punktami A i B wraz z tymi punktami. Mówi się wówczas o odcinku domkniętym. Gdy zaś usunie się końce o., mówimy o o. otwartym. Środkiem odcinka S jest punkt tego odcinka równoodległy od jego końców, $S = \frac{A+B}{2}$. O. jest najkrótszą drogą łączącą na płaszczyźnie dwa punkty A i B, której długość ozn. $|AB|$. Jeśli odcinek $\overline{AB}$ znajduje się w układzie współrzędnych oraz $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, to

$$\boxed{\begin{aligned}&|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2},\\ &S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).\end{aligned}}$$

W przestrzeni kartezjańskiej R^n o. $\overline{AB}$ jest zbiorem punktów opisanych funkcją $f(t) = (1 - t)A + Bt$, gdzie $t \in \langle 0, 1\rangle$. Funkcję f nazywamy parametryzacją odcinka $\overline{AB}$.

ODCINEK KOŁOWY – każda z dwóch części, na jakie cięciwa dzieli koło, wraz z tą cięciwą. Pole o.k., któremu odpowiada kąt środkowy, wypukły α wyraża się wzorem $P = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\alpha}{180^\circ}\pi - \sin\alpha\right)$, gdzie r – długość promienia koła.

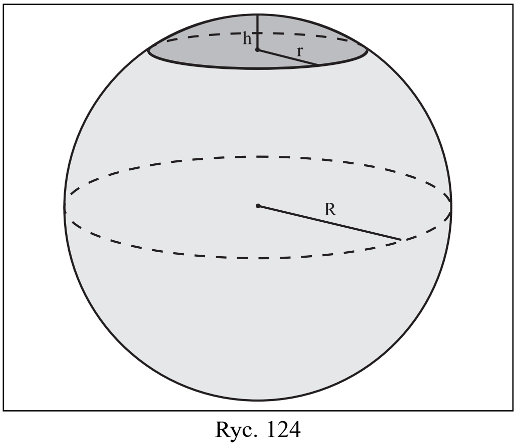


Ryc. 123

ODCINEK KULI – każda z dwóch części kuli, na które dzieli ją płaszczyzna przechodząca przez jej wnętrze, wraz z przekrojem kuli tą płaszczyzną. Płaszczyzna ta dzieli sferę (brzeg kuli) na dwie części, zwane czaszami kuli. Pole o.k. obliczamy ze wzoru $P = 2\pi Rh$, zaś objętość ze wzoru

$$\boxed{V = \frac{1}{2}\pi\left(r^2 h + \frac{h^3}{3}\right),}$$

gdzie r – długość promienia podstawy czaszy, R – długość promienia kuli, h – długość wysokości czaszy.



Ryc. 124

ODEJMOWANIE – jedno z → działań arytmetycznych. O. jest działaniem dwuargumentowym. O. nie jest łączne ($10 - (5 - 2) = 7 \neq 3 = (10 - 5) - 2$), ani przemienne ($7 - 4 = 3 \neq -3 = 4 - 7$). Wynik odejmowania to różnica, pierwszy argument o. to odjemna, drugi to odjemnik. O. oznaczamy przez znak „–” (minus). Wynikiem odejmowania $a - b$ jest liczba c taka, że $b + c = a$. W tym sensie o. jest działaniem odwrotnym do → dodawania.

Na odejmowanie $a - b$ możemy patrzeć także jak na dodawanie do a elementu odwrotnego do b w → grupie $(\mathbb{R}, +)$.

ODJEMNA – pierwszy argument → odejmowania.

ODJEMNIK – drugi argument → odejmowania.

ODLEGŁOŚĆ – funkcja przypisująca każdej parze punktów $(x, y) \in X \times X$ nieujemną liczbę d mającą następujące własności:

1) $\bigwedge_{x,y\in X} d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (oznaczoność),

2) $\bigwedge_{x,y\in X} d(x, y) = d(y, x)$ (symetria),

3) $\bigwedge_{x,y,z\in X} d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (nierówność trójkąta).

Najczęściej stosuje się o. euklidesową. Na osi liczbowej $d(x, y) = |x - y|$, na płaszczyźnie

$$\boxed{d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_1)^2}}$$

(gdzie $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$), ogólnie w $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}}$$

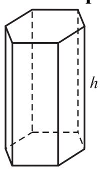
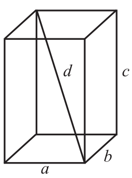
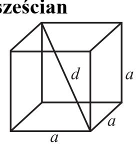
ZAPIS LICZB W RÓŻNYCH SYSTEMACH LICZBOWYCH

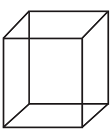
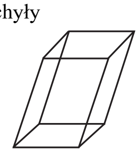
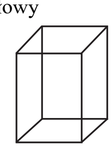
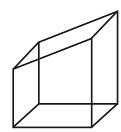
System pozycyjny *k*-liczbowy								System rzymski
Podstawa systemu *k*	**16**	**12**	**10**	**8**	**4**	**3**	**2**	
	0	0	0	0	0	0	0	
	1	1	1	1	1	1	1	I
	2	2	2	2	2	2	10	II
	3	3	3	3	3	10	11	III
	4	4	4	4	10	11	100	IV
	5	5	5	5	11	12	101	V
	6	6	6	6	12	20	110	VI
	7	7	7	7	13	21	111	VII
	8	8	8	10	20	22	1000	VIII
	9	9	9	11	21	100	1001	IX
	A	A	10	12	22	101	1010	X
	B	B	11	13	23	102	1011	XI
	C	10	12	14	30	110	1100	XII
	D	11	13	15	31	111	1101	XIII
	E	12	14	16	32	112	1110	XIV
	F	13	15	17	33	120	1111	XV
	10	14	16	20	100	121	10000	XVI
	11	15	17	21	101	122	10001	XVII
	12	16	18	22	102	200	10010	XVIII
	13	17	19	23	103	201	10011	XIX
	14	18	20	24	110	202	10100	XX
	15	19	21	25	111	210	10101	XXI
	16	1A	22	26	112	211	10110	XXII
	17	1B	23	27	113	212	10111	XXIII
	18	20	24	30	120	220	11000	XXIV
	19	21	25	31	121	221	11001	XXV
	1A	22	26	32	122	222	11010	XXVI
	1B	23	27	33	123	1000	11011	XXVII
	1C	24	28	34	130	1001	11100	XXVIII
	1D	25	29	35	131	1002	11101	XXIX

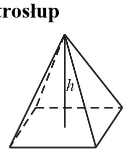
System pozycyjny *k*-liczbowy								System rzymski
Podstawa systemu *k*	**16**	**12**	**10**	**8**	**4**	**3**	**2**	
	1E	26	30	36	132	1010	11110	XXX
	1F	27	31	37	133	1011	11111	XXXI
	20	28	32	40	200	1012	100000	XXXII
	21	29	33	41	201	1020	100001	XXXIII
	22	2A	34	42	202	1021	100010	XXXIV
	23	2B	35	43	203	1022	100011	XXXV
	24	30	36	44	210	1100	100100	XXXVI
	25	31	37	45	211	1101	100101	XXXVII
	26	32	38	46	212	1102	100110	XXXVIII
	27	33	39	47	213	1110	100111	XXXIX
	28	34	40	50	220	1111	101000	XL
	29	35	41	51	221	1112	101001	XLI
	2A	36	42	52	222	1120	101010	XLII
	2B	37	43	53	223	1121	101011	XLIII
	2C	38	44	54	230	1122	101100	XLIV
	2D	39	45	55	231	1200	101101	XLV
	2E	3A	46	56	232	1201	101110	XLVI
	2F	3B	47	57	233	1202	101111	XLVII
	30	40	48	60	300	1210	110000	XLVIII
	31	41	49	61	301	1211	110001	XLIX
	32	42	50	62	302	1212	110010	L
	33	43	51	63	303	1220	110011	LI
	34	44	52	64	310	1221	110100	LII
	35	45	53	65	311	1222	110101	LIII
	36	46	54	66	312	2000	110110	LIV
	37	47	55	67	313	2001	110111	LV
	38	48	56	70	320	2002	111000	LVI
	39	49	57	71	321	2010	111001	LVII
	3A	4A	58	72	322	2011	111010	LVIII
	3B	4B	59	73	323	2012	111011	LIX
	3C	50	60	74	330	2020	111100	LX

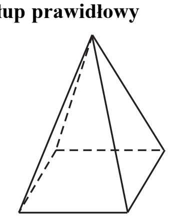
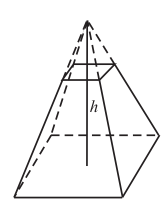
n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$
1	1	1	1,0000	1,0000	1 000,0000	3,1416	0,7854
2	4	8	1,4142	1,2599	500,0000	6,2832	3,1416
3	9	27	1,7321	1,4422	333,3333	9,4248	7,0686
4	16	64	2,0000	1,5874	250,0000	12,5664	12,5664
5	25	125	2,2361	1,7100	200,0000	15,7080	19,6350
6	36	216	2,4495	1,8171	166,6667	18,8496	28,2743
7	49	343	2,6458	1,9129	142,8571	21,9911	38,4845
8	64	512	2,8284	2,0000	125,0000	25,1327	50,2655
9	81	729	3,0000	2,0801	111,1111	28,2743	63,6173
10	100	1 000	3,1623	2,1544	100,0000	31,4159	78,5398
11	121	1 331	3,3166	2,2240	90,9091	34,5575	95,0332
12	144	1 728	3,4641	2,2894	83,3333	37,6991	113,0973
13	169	2 197	3,6056	2,3513	76,9231	40,8407	132,7323
14	196	2 744	3,7417	2,4101	71,4286	43,9823	153,9380
15	225	3 375	3,8730	2,4662	66,6667	47,1239	176,7146
16	256	4 096	4,0000	2,5198	62,5000	50,2655	201,0619
17	289	4 913	4,1231	2,5713	58,8235	53,4071	226,9801
18	324	5 832	4,2426	2,6207	55,5556	56,5487	254,4690
19	361	6 859	4,3589	2,6684	52,6316	59,6903	283,5287
20	400	8 000	4,4721	2,7144	50,0000	62,8319	314,1593
21	441	9 261	4,5826	2,7589	47,6190	65,9734	346,3606
22	484	10 648	4,6904	2,8020	45,4545	69,1150	380,1327
23	529	12 167	4,7958	2,8439	43,4783	72,2566	415,4756
24	576	13 824	4,8990	2,8845	41,6667	75,3982	452,3893
25	625	15 625	5,0000	2,9240	40,0000	78,5398	490,8739
26	676	17 576	5,0990	2,9625	38,4615	81,6814	530,9292
27	729	19 683	5,1962	3,0000	37,0370	84,8230	572,5553
28	784	21 952	5,2915	3,0366	35,7143	87,9646	615,7522
29	841	24 389	5,3852	3,0723	34,4828	91,1062	660,5199
30	900	27 000	5,4772	3,1072	33,3333	94,2478	706,8583

Twierdzenie Eulera: jeśli w wielościanie wypukłym N – oznacza liczbę wierzchołków, s – liczbę ścian oraz k – liczbę krawędzi, to prawdziwa jest równość $N + s = k + 2$

graniastosłup 	wielościan, którego dwie ściany są wielokątami przystającymi leżącymi w płaszczyznach równoległych – zwane są podstawami graniastosłupa, a pozostałe ściany, zwane ścianami bocznymi, są równoległobokami.	objętość: $V = P_p \cdot h$ pole powierzchni całkowitej: $P_c = 2P_p + P_b$ pole powierzchni bocznej: $P_b = O_p \cdot h$ gdzie P_p – p. podstawy, O_p – obwód podstawy
prostopadłościan 	graniastosłup prosty, którego podstawa jest prostokątem. **Wymiary prostopadłościanu są to długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka.**	objętość: $V = abc$ pole powierzchni całkowitej: $P_c = 2(ab + ac + bc)$ pole: powierzchni bocznej $P_b = 2(a + b) \cdot c$ dł. przekątnej: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
sześcian 	prostopadłościan, którego wszystkie krawędzie są jednakowej długości (w konsekwencji czego wszystkie ściany są jednakowe).	objętość: $V = a^3$ pole powierzchni całkowitej: $P_c = 6a^2$ pole powierzchni bocznej: $P_b = 4a^2$ dł. przekątnej: $d = \sqrt{3}a$

prosty	pochyły	prawidłowy	ścięty
			
graniastosłup, którego krawędzie boczne są prostopadłe do podstawy	graniastosłup, który nie jest prosty	graniastosłup prosty, który ma w podstawach wielokąty foremne	każda z dwóch części, na jakie dzieli graniastosłup płaszczyzna tnąca nierównoległa do podstaw i nie mająca z nimi punktów wspólnych

ostrosłup 	wielościan, którego jedna ściana, zwana podstawą ostrosłupa jest dowolnym wielokątem a pozostałe ściany są trójkątami posiadającymi wspólny wierzchołek zwany wierzchołkiem ostrosłupa.	objętość: $V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$ pole powierzchni całkowitej: $P_c = P_p + P_b$ gdzie: P_p – pole podstawy

ostrosłup prawidłowy	**ostrosłup ścięty**
	
ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt foremny, a spodkiem wysokości ostrosłupa jest środek okręgu opisanego na podstawie.	część ostrosłupa zawarta pomiędzy płaszczyzną jego podstawy, a równoległą doń płaszczyzną przechodzącą przez punkt wewnętrzny ostrosłupa. Objętość ostrosłupa ściętego wyraża się wzorem: $V = \frac{1}{3}h\left(P_1 + P_2 + \sqrt{P_1 \cdot P_2}\right)$ gdzie: P_1, P_2 – pola powierzchni podstaw h – wysokość ostrosłupa ściętego