

SPIS TREŚCI

O vademecum

1. Liczby i ich zbiory	13
1.1. Rachunek zdań i rachunek zbiorów	13
1.1.1. Podstawowe wiadomości o języku matematycznym	13
1.1.2. Zdania złożone i ich wartości logiczne	13
1.1.3. Prawa logiczne (tautologie)	13
1.1.4. Zbiory i działania na zbiorach	14
1.1.5. Własności działań na zbiorach	14
1.2. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory	16
1.2.1. Ilustracja graficzna na diagramach Venna	16
1.3. Potęgowanie i pierwiastkowanie	17
1.3.1. Definicja potęgi	17
1.3.2. Prawa działań na potęgach	17
1.3.3. Definicja pierwiastka n -tego stopnia z liczby a	17
1.3.4. Prawa działań na pierwiastkach	17
1.4. Przedziały na osi liczbowej	19
1.4.1. Oś liczbową	19
1.4.2. Przedziały liczbowe	19
1.4.3. Rodzaje przedziałów liczbowych	19
1.5. Wartość bezwzględna i jej interpretacja geometryczna	21
1.5.1. Definicja wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej	21
1.5.2. Podstawowe własności wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej	21
1.5.3. Interpretacja wartości bezwzględnej na osi liczbowej	21
1.5.4. Wartość bezwzględna jako odległość między dwiema liczbami na osi liczbowej	21
1.5.5. Zbiory na osi liczbowej opisane równaniami i nierównościami z wartością bezwzględną	21
1.6. Równania i nierówności z wartością bezwzględną	24
1.6.1. Niektóre równania z wartością bezwzględną	24
1.6.2. Niektóre nierówności z wartością bezwzględną	24
1.6.3. Niektóre układy równań liniowych z wartością bezwzględną	25
1.6.4. Podsumowanie	25
1.7. Obliczanie przybliżonych wartości liczbowych z określoną dokładnością	28
1.7.1. Błąd przybliżenia i jego rodzaje	28
1.7.2. Zasady zaokrąglania ułamków dziesiętnych	28
1.7.3. Obliczenia procentowe – trzy typy zadań na procenty	28
1.8. Indukcja matematyczna	30
1.8.1. Indukcja przyrodnicza a indukcja matematyczna	30
1.8.2. Zasada indukcji matematycznej	30
1.8.3. Schemat rozumowania w indukcji matematycznej	30

Zadania maturalne

2. Funkcje i ich własności	33
2.1. Funkcja, jej wykres i własności	33
2.1.1. Wprowadzenie pojęcia funkcji	33
2.1.2. Definicja funkcji	33
2.1.3. Sposoby określania funkcji liczbo-liczbowej (liczbowej)	34
2.1.4. Wykres funkcji	34
2.1.5. Podstawowe własności funkcji	35
2.1.6. Interpretacja graficzna podstawowych własności funkcji	36
2.2. Wybrane własności funkcji	38
2.2.1. Różnowartościowość funkcji	38
2.2.2. Pojęcie funkcji odwrotnej do danej	39

2.2.3. Parzystość funkcji	39
2.2.4. Okresowość funkcji	40
2.3. Elementarne przekształcenia geometryczne wykresu funkcji	41
2.3.1. Przesunięcie wykresu funkcji wzdłuż osi OX	41
2.3.2. Przesunięcie wykresu funkcji wzdłuż osi OY	41
2.3.3. Przesunięcie wykresu funkcji wzdłuż obu osi układu współrzędnych	42
2.4. Wybrane przekształcenia wykresu funkcji	44
2.4.1. Przekształcenie wykresu funkcji przez symetrię względem osi układu współrzędnych	44
2.4.2. Przekształcenie wykresu funkcji przez zmianę skali	44
2.4.3. Wykresy funkcji z wartościami bezwzględną	45
2.5. Zastosowanie funkcji do modelowania zjawisk oraz interpretowanie zjawisk na podstawie wykresów i modeli	47
2.5.1. O modelowaniu zjawisk z otaczającej rzeczywistości	47
2.5.2. Odczytywanie własności funkcji z jej wykresu	48

Zadania maturalne

3. Wielomiany i funkcje wymierne	50
3.1. Funkcja liniowa	50
3.1.1. Definicja, wykres i własności funkcji liniowej	50
3.1.2. Równania i nierówności liniowe z wartością bezwzględną	50
3.1.3. Równania i nierówności liniowe (I stopnia $a \neq 0$)	51
3.1.4. Równania liniowe z parametrem	51
3.1.5. Układy równań liniowych (I stopnia $a \neq 0 \vee b \neq 0$) z dwiema niewiadomymi	52
3.1.6. Układy równań liniowych z parametrem	53
3.1.7. Układy równań liniowych z wartością bezwzględną	54
3.1.8. Układy trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi	54
3.1.9. Układy nierówności liniowych	55
3.2. Funkcja kwadratowa	58
3.2.1. Definicja, wykres i własności funkcji kwadratowej	58
3.2.2. Równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą (II stopnia $a \neq 0$)	61
3.2.3. Równania i nierówności kwadratowe niepełne ($b = 0 \vee c = 0$)	63
3.2.4. Przykłady równań sprowadzalnych do równań kwadratowych	64
3.2.5. Równania stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi	65
3.2.6. Informacja o nierównościach stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi	66
3.2.7. Układy równań, z których co najmniej jedno jest równaniem kwadratowym	67
3.3. Zastosowanie funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań tekstowych	70
3.3.1. Zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych	70
3.3.2. Zadania optymalizacyjne	71
3.4. Równania, nierówności i układy równań II stopnia z wartością bezwzględną lub z parametrem	73
3.4.1. Równania, nierówności i układy równań II stopnia z wartością bezwzględną	73
3.4.2. Równania i nierówności kwadratowe z parametrem	74
3.4.3. Układy równań II stopnia z parametrem	76
3.5. Wielomiany i działania na nich	79
3.5.1. Wprowadzenie pojęcia wielomianu	79
3.5.2. Definicja wielomianu stopnia n jednej zmiennej rzeczywistej	79
3.5.3. Działania na wielomianach	80
3.6. Twierdzenia o własnościach wielomianów i ich zastosowaniach	82
3.6.1. Schemat Hornera	82
3.6.2. Twierdzenia o stopniu sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu wielomianów	82
3.6.3. Twierdzenia związane z rozkładem wielomianu, z podzielnością wielomianu przez dwumian oraz z istnieniem pierwiastka wielomianu	83
3.6.4. Wzory Viète'a dla wielomianów trzeciego i czwartego stopnia	83
3.6.5. Metody rozkładu wielomianów na czynniki	84
3.6.6. Równania i nierówności wielomianowe	84

3.7. Wyrażenia i funkcje wymierne	88
3.7.1. Wyrażenia wymierne i działania na nich	88
3.7.2. Funkcje wymierne	89
3.8. Równania i nierówności wymierne	91
3.8.1. Definicje równania i nierówności wymiernej	91
3.8.2. Analogie między procedurą rozwiązywania równań i nierówności wymiernych	91
3.8.3. Równania i nierówności związane z funkcją homograficzną	92
3.8.4. Równania, nierówności, układy równań i nierówności wymiernych z wartością bezwzględną i z parametrem	93
3.9. Dwumian Newtona	94
3.9.1. Pojęcie silni	94
3.9.2. Symbol Newtona	94
3.9.3. Trójkąt Pascala (dwie wersje)	94
3.9.4. Wzór dwumianowy Newtona	94
3.9.5. Wzór ogólny na k -ty wyraz rozwinięcia we wzorze dwumianowym Newtona	94
3.9.6. Związek trójkąta Pascala ze wzorem Newtona	95
3.9.7. Wnioski ze wzoru dwumianowego Newtona	95

Zadania maturalne

4. Ciągi liczbowe	97
4.1. Podstawowe własności ciągów	97
4.1.1. Ciąg jako funkcja	97
4.1.2. Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n)	97
4.1.3. Monotoniczność ciągu	98
4.1.4. Sposoby określania ciągu	98
4.1.5. Wykres ciągu	98
4.1.6. Ciąg ograniczony	98
4.2. Ciąg arytmetyczny	100
4.2.1. Definicja ciągu arytmetycznego	100
4.2.2. Wyznaczanie ciągu arytmetycznego	100
4.2.3. Monotoniczność ciągu arytmetycznego	100
4.2.4. Ważne wzory dla ciągu arytmetycznego	100
4.3. Ciąg geometryczny	103
4.3.1. Definicja ciągu geometrycznego	103
4.3.2. Wyznaczanie ciągu geometrycznego	103
4.3.3. Monotoniczność ciągu geometrycznego	103
4.3.4. Ważne wzory dla ciągu geometrycznego	103
4.4. Porównanie ciągu arytmetycznego z ciągiem geometrycznym	105
4.4.1. Tabela porównawcza	105
4.5. Procent składany	107
4.5.1. Niektóre podstawowe pojęcia matematyki finansowej	107
4.5.2. Procent prosty i składany	107
4.6. Granica ciągu	109
4.6.1. Pojęcia pomocnicze	109
4.6.2. Definicja granicy właściwej ciągu	109
4.6.3. Ciągi zbieżne i ich własności	109
4.6.4. Definicja granicy niewłaściwej ciągu	109
4.6.5. Własności ciągów rozbieżnych do nieskończoności	110
4.7. Szereg geometryczny	111
4.7.1. Definicja szeregu geometrycznego	111
4.7.2. Zbieżność szeregu geometrycznego i jego suma S	111

Zadania maturalne

5. Funkcje trygonometryczne 112

5.1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym	112
5.1.1. Miara stopniowa i łukowa kąta	112
5.1.2. Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego	112
5.1.3. Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów	112
5.2. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta	114
5.2.1. Kąt skierowany w układzie współrzędnych	114
5.2.2. Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta	114
5.2.3. Wartości funkcji trygonometrycznych kątów $\alpha \in (0^\circ; 360^\circ)$	114
5.2.4. Wzory redukcyjne	115
5.3. Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej	117
5.3.1. Definicje funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej	117
5.3.2. Tabela zmienności funkcji trygonometrycznych w przedziale $x \in (0; 2\pi)$	117
5.3.3. Okresowość funkcji trygonometrycznych	117
5.3.4. Wykresy funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej	117
5.4. Związki między funkcjami trygonometrycznymi	119
5.4.1. Najprostsze tożsamości trygonometryczne	119
5.4.2. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy argumentów	119
5.4.3. Funkcje trygonometryczne wielokrotności argumentów	119
5.4.4. Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych	119
5.5. Proste równania trygonometryczne	121
5.5.1. Typy elementarnych równań trygonometrycznych	121

Zadania maturalne

6. Planimetria 123

6.1. Figury płaskie	123
6.1.1. Podstawowe figury geometryczne	123
6.1.2. Pojęcie odległości dwóch punktów	124
6.1.3. Stosunek podziału odcinka	124
6.1.4. Okrąg i koło	125
6.1.5. Pewne własności i pojęcia związane z figurami geometrycznymi	126
6.1.6. Rodzaje kątów	127
6.1.7. Klasyfikacja wielokątów	128
6.1.8. Podział trójkątów	128
6.1.9. Zależności w trójkącie	128
6.1.10. Odcinki i proste w trójkącie	129
6.1.11. Podział czworokątów	130
6.1.12. Twierdzenia dotyczące wielokątów foremnych	130
6.1.13. Wzajemne położenia wybranych figur geometrycznych na płaszczyźnie	131
6.1.14. Okrąg a czworokąt (wielokąt)	132
6.2. Związki miarowe w figurach płaskich	134
6.2.1. Pola i obwody wybranych figur płaskich	134
6.2.2. Związki miarowe w trójkącie prostokątnym	135
6.2.3. Związki miarowe w dowolnym trójkącie: twierdzenie sinusów i cosinusów	135
6.3. Przekształcenia geometryczne płaszczyzny	138
6.3.1. Pojęcie przekształcenia geometrycznego	138
6.3.2. Wybrane rodzaje przekształceń geometrycznych i ich własności	140
6.3.3. Przystawianie figur (trójkątów)	144
6.3.4. Podobieństwo (i jednokładność) figur (trójkątów)	145
6.3.5. Zagadnienia związane z symetriami	147
6.3.6. Pewne porównania nazw figur związanych z przekształceniami geometrycznymi	149
6.4. Twierdzenie Talesa i jego związek z podobieństwem trójkątów	151
6.4.1. Pojęcia pomocnicze	151
6.4.2. Twierdzenie Talesa (różne sformułowania)	152
6.4.3. Wnioski z twierdzenia Talesa	152

6.4.4. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa	153
6.4.5. Związek twierdzenia Talesa z podobieństwem trójkątów	153
6.5. Rachunek wektorowy w ujęciu syntetycznym	156
6.5.1. Definicja wektora i pojęć z nim związanych	156
6.5.2. Działania na wektorach	157
6.5.3. Własności działań na wektorach	157
6.5.4. Iloczyn skalarny wektorów i jego własności	158
6.5.5. Spostrzeżenia dotyczące rachunku wektorów	158

Zadania maturalne

7. Geometria analityczna	160
7.1. Rachunek wektorowy w ujęciu analitycznym	160
7.1.1. Analityczny opis punktu	160
7.1.2. Analityczny opis wektora	161
7.1.3. Długość wektora i długość odcinka we współrzędnych	162
7.1.4. Działania na wektorach na płaszczyźnie w ujęciu analitycznym	163
7.1.5. Warunki: prostokątności oraz równoległości wektorów	164
7.1.6. Kąt pary wektorów niezerowych na płaszczyźnie	164
7.2. Analityczny opis prostej i półpłaszczyzny	166
7.2.1. Różne postacie równań prostej	166
7.2.2. Zestawienie różnych postaci równań prostej wraz z informacjami, które one niosą	168
7.2.3. Warunki prostokątności ($\perp$) i równoległości ($\parallel$) pary prostych o danych równaniach	169
7.2.4. Analityczny opis półpłaszczyzny	170
7.2.5. Wzajemne położenie pary prostych na płaszczyźnie w ujęciu syntetycznym i analitycznym	172
7.2.6. Zbiory punktów na płaszczyźnie w ujęciu analitycznym	172
7.3. Odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej	175
7.3.1. Odległość dwóch punktów na płaszczyźnie	175
7.3.2. Odległość punktu od prostej na płaszczyźnie	175
7.3.3. Odległość dwóch prostych na płaszczyźnie	175
7.3.4. Zestawienie wzorów na odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej	176
7.4. Okrąg i koło we współrzędnych	177
7.4.1. Równanie okręgu	177
7.4.2. Różne postacie równań okręgu	177
7.4.3. Koło we współrzędnych	177
7.4.4. Różne postacie nierówności koła	177
7.4.5. Informacja o innych krzywych II stopnia w ujęciu analitycznym	178
7.5. Wzajemne położenie prostej i okręgu oraz dwóch okręgów na płaszczyźnie w ujęciu analitycznym	180
7.5.1. Prosta i okrąg na płaszczyźnie współrzędnych	180
7.5.2. Para okręgów na płaszczyźnie współrzędnych	181
7.6. Przekształcenia geometryczne płaszczyzny w ujęciu analitycznym	185
7.6.1. Analityczny opis przekształceń izometrycznych	185
7.6.2. Analityczny opis niektórych przekształceń nieizometrycznych	186
7.6.3. Zestawienie analitycznych wzorów na przekształcenia geometryczne płaszczyzny	186

Zadania maturalne

8. Stereometria	189
8.1. Wybrane zagadnienia geometrii przestrzennej	189
8.1.1. Wprowadzenie do stereometrii	189
8.1.2. Równanie ogólne płaszczyzny w przestrzeni	189
8.1.3. Niektóre analogie między planimetrią i stereometrią	190
8.2. Proste i płaszczyzny w przestrzeni	194
8.2.1. Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni	194
8.2.2. Wzajemne położenie prostej i płaszczyzny w przestrzeni	194

8.2.3. Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn w przestrzeni	195
8.2.4. Proste i płaszczyzny równoległe	196
8.2.5. Proste i płaszczyzny prostopadłe	197
8.2.6. Rzut równoległy na płaszczyznę	198
8.2.7. Kąty w przestrzeni	199
8.3. Figury przestrzenne i ich podział	201
8.3.1. Podział figur przestrzennych	201
8.3.2. Informacje wstępne o figurach przestrzennych	202
8.3.3. Definicje niektórych wielościanów i ważniejszych pojęć związanych z wielościanami	204
8.3.4. Bryły obrotowe (figury obrotowe)	205
8.3.5. Szczególne kąty w bryłach	206
8.4. Wielościany foremne	214
8.4.1. Definicja wielościanu foremnego	214
8.4.2. Własności wielościanów foremnych	214
8.5. Związki miarowe w figurach przestrzennych	218
8.5.1. Pola powierzchni i siatki oraz objętości wielościanów i brył obrotowych	218
8.5.2. Ważne twierdzenia dotyczące związków miarowych w figurach przestrzennych	222
8.5.3. Wskazówki do zastosowań trygonometrii do obliczania pól powierzchni i objętości figur przestrzennych	223
8.6. Przekroje płaskie figur przestrzennych	228
8.6.1. Pojęcie przekroju płaskiego	228
8.6.2. Wybrane przekroje płaskie wielościanów	228
8.6.3. Możliwe przekroje brył obrotowych	229

Zadania maturalne

9. Rachunek prawdopodobieństwa	233
9.1. Elementy kombinatoryki	233
9.1.1. Ważne pojęcia wykorzystywane w definicjach pojęć kombinatorycznych	233
9.1.2. Podstawowe pojęcia kombinatoryczne	234
9.2. Pojęcie prawdopodobieństwa i jego własności	239
9.2.1. Wstępne pojęcia probabilistyczne (rachunku prawdopodobieństwa)	239
9.2.2. Algebra zdarzeń	240
9.2.3. Prawdopodobieństwo i jego własności	241
9.3. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń	243
9.3.1. Zastosowanie kombinatoryki do obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń	243
9.3.2. Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzenia z wykorzystaniem wzoru na prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego	245
9.3.3. Obliczanie prawdopodobieństwa sumy zdarzeń	246
9.3.4. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń za pomocą drzewa probabilistycznego	246
9.4. Prawdopodobieństwo warunkowe i niezależność zdarzeń	249
9.4.1. Prawdopodobieństwa warunkowe	249
9.4.2. Niezależność zdarzeń	250
9.4.3. Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń	250
9.5. Prawdopodobieństwo całkowite	252
9.5.1. Pojęcie prawdopodobieństwa całkowitego	252
9.5.2. Związek prawdopodobieństwa całkowitego z drzewem probabilistycznym	252
9.6. Schemat Bernoulliego	255
9.6.1. Podstawowe wiadomości o schemacie Bernoulliego	255
9.6.2. Różne modyfikacje wzoru na liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego	256
9.6.3. Porównanie wzorów dotyczących liczby sukcesów w schemacie Bernoulliego	257
9.6.4. Najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego	257

9.7. Elementy statystyki opisowej	259
9.7.1. Informacje o przedmiocie statystyki	259
9.7.2. Niektóre podstawowe pojęcia statystyczne	259
9.7.3. Niektóre pojęcia związane z pomiarem statystycznym	260

Zadania maturalne

10. Funkcje potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne	263
10.1. Funkcja potęgowa	263
10.1.1. Potęga o wykładniku rzeczywistym	263
10.1.2. Definicja, wykres i własności funkcji potęgowej	264
10.2. Funkcja wykładnicza	268
10.2.1. Definicja, wykres i własności funkcji wykładniczej	268
10.2.2. Równania i nierówności wykładnicze	269
10.3. Funkcja logarytmiczna	271
10.3.1. Logarytm i jego własności	271
10.3.2. Definicja, wykres i własności funkcji logarytmicznej	273
10.3.3. Funkcja logarytmiczna jako odwrotna do wykładniczej	274
10.3.4. Równania i nierówności logarytmiczne	275

Zadania maturalne

11. Ciągłość i pochodna funkcji	279
11.1. Granica ciągłości funkcji	279
11.1.1. Granica funkcji	279
11.1.2. Ciągłość funkcji	288
11.2. Podstawowe wiadomości o pochodnych	291
11.2.1. Pojęcie pochodnej funkcji w punkcie	291
11.2.2. Pochodna jako funkcja – wzory na pochodne	294
11.3. Pochodna a monotoniczność i ekstremum	296
11.3.1. Uwagi wstępne	296
11.3.2. Związek pochodnej funkcji z monotonicznością i ekstremum funkcji	297
11.3.3. Największa i najmniejsza wartość funkcji w przedziale (ekstremum globalne)	300
11.4. Praktyczne zastosowanie pochodnej w zadaniach optymalizacyjnych	302
11.4.1. Procedura rozwiązywania zadań optymalizacyjnych z wykorzystaniem pochodnej	302

Zadania maturalne

Wskazówki, jak rozwiązywać zadania maturalne krok po kroku	305
---	------------

Indeks	315
---------------------	------------

Bibliografia	322
---------------------------	------------