

Spis rzeczy

Spis tabel zamieszczonych w tekście

XLI

1. ARYTMETYKA

1

1.1. Elementarne reguły rachunkowe

1

1.1.1. Liczby

1

1.1.1.1. Liczby naturalne, całkowite i wymierne

1

1.1.1.2. Liczby niewymierne i przestępne

2

1.1.1.3. Liczby rzeczywiste

2

1.1.2. Metody dowodzenia twierdzeń

5

1.1.2.1. Dowód wprost

5

1.1.2.2. Dowód nie wprost i przez zaprzeczenie

6

1.1.2.3. Indukcja zupełna

6

1.1.2.4. Dowód konstruktywny

7

1.1.3. Sumy i iloczyny

7

1.1.3.1. Sumy

7

1.1.3.2. Ilożyny

8

1.1.4. Potęgi, pierwiastki i logarytmy

9

1.1.4.1. Potęgi

9

1.1.4.2. Pierwiastki

9

1.1.4.3. Logarytmy

10

1.1.4.4. Pewne szczególne logarytmy

11

1.1.5. Wyrażenia algebraiczne

12

1.1.5.1. Definicje

12

1.1.5.2. Typy wyrażeń algebraicznych

12

1.1.6. Wyrażenia wymierne

13

1.1.6.1. Przedstawienie w postaci wielomianu

13

1.1.6.2. Rozkład wielomianu na czynniki

13

1.1.6.3. Wzory skróconego mnożenia

13

1.1.6.4. Dwumian Newtona

14

1.1.6.5. Wyznaczanie największego wspólnego dzielnika dwóch wielomianów

16

1.1.7. Wyrażenia ułamkowe wymierne

16

1.1.7.1. Sprowadzanie do najprostszej postaci

16

1.1.7.2. Wyznaczanie części całkowitej wyrażenia wymiernego

17

1.1.7.3. Rozkład na ułamki proste

17

1.1.7.4. Przekształcanie proporcji

19

1.1.8. Wyrażenia niewymierne

19

1.2. Szeregi skończone

20

1.2.1. Definicja szeregu skończonego

20

1.2.2. Szereg arytmetyczny

20

1.2.3. Szereg geometryczny

21

1.2.4. Niektóre szczególne szeregi skończone

21

1.2.5. Wartości średnie	21
1.2.5.1. Średnia arytmetyczna	22
1.2.5.2. Średnia geometryczna	22
1.2.5.3. Średnia harmoniczna	22
1.2.5.4. Średnia kwadratowa	22
1.2.5.5. Porównanie wartości średnich dla dwu dodatnich liczb a i b	23
1.3. Matematyka finansowa	23
1.3.1. Rachunek procentowy	23
1.3.2. Rachunek stóp procentowych	24
1.3.3. Rachunek kredytowy	25
1.3.3.1. Spłata kredytu	25
1.3.3.2. Równe raty	25
1.3.3.3. Równe zobowiązania roczne	26
1.3.4. Rachunek rentowy	27
1.3.4.1. Renta	27
1.3.4.2. Renty stałe realizowane z dołu	27
1.3.4.3. Stan konta po n płatnościach rentowych	28
1.3.5. Odpisy, amortyzacja	28
1.4. Nierówności	31
1.4.1. Nierówności właściwe	31
1.4.1.1. Definicje	31
1.4.1.2. Własności nierówności typu I i II	32
1.4.2. Niektóre ważniejsze nierówności	33
1.4.2.1. Nierówność trójkąta	33
1.4.2.2. Nierówności dla wartości bezwzględnej różnicy dwu liczb	33
1.4.2.3. Nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną	33
1.4.2.4. Nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną i kwadratową	34
1.4.2.5. Nierówności pomiędzy różnymi średnimi dwóch liczb rzeczywistych	34
1.4.2.6. Nierówność Bernoulliego	34
1.4.2.7. Nierówność dwumianowa	34
1.4.2.8. Nierówność Cauchy'ego-Schwarza	34
1.4.2.9. Nierówność Czebyszewa	35
1.4.2.10. Uogólniona nierówność Czebyszewa	35
1.4.2.11. Nierówność Höldera	35
1.4.2.12. Nierówność Minkowskiego	36
1.4.3. Rozwiązywanie nierówności pierwszego i drugiego stopnia	36
1.4.3.1. Wprowadzenie	36
1.4.3.2. Nierówności pierwszego stopnia	37
1.4.3.3. Nierówności drugiego stopnia	37
1.4.3.4. Ogólny przypadek nierówności drugiego stopnia	37
1.5. Liczby zespolone	38
1.5.1. Liczby urojone i zespolone	38
1.5.1.1. Jednostka urojona	38
1.5.1.2. Liczby zespolone	38
1.5.2. Interpretacja geometryczna	38
1.5.2.1. Przedstawienie wektorowe	38
1.5.2.2. Równość liczb zespolonych	38
1.5.2.3. Postać trygonometryczna liczb zespolonych	38
1.5.2.4. Przedstawienie wykładnicze liczby zespolonej	39
1.5.2.5. Liczby zespolone sprzężone	40

1.5.3. Działania algebraiczne na liczbach zespolonych	40
1.5.3.1. Dodawanie i odejmowanie	40
1.5.3.2. Mnożenie	40
1.5.3.3. Dzielenie	41
1.5.3.4. Wzory ogólne dla czterech podstawowych działań	41
1.5.3.5. Potęgi liczby zespolonej	41
1.5.3.6. Pierwiastkowanie liczb zespolonych	42
1.6. Równania algebraiczne i przestępne	42
1.6.1. Porządkowanie równań algebraicznych	42
1.6.1.1. Definicje	42
1.6.1.2. Układy n równań algebraicznych	43
1.6.1.3. Pierwiastki obce	43
1.6.2. Równania stopnia pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego	43
1.6.2.1. Równania pierwszego stopnia (liniowe)	43
1.6.2.2. Równania drugiego stopnia (kwadratowe)	43
1.6.2.3. Równania trzeciego stopnia (sześciennne)	44
1.6.2.4. Równania czwartego stopnia (dwukwadratowe)	46
1.6.2.5. Równania stopnia piątego i wyższych	47
1.6.3. Równania n -tego stopnia	47
1.6.3.1. Ogólne własności równań algebraicznych	47
1.6.3.2. Równania o współczynnikach rzeczywistych	48
1.6.4. Sprowadzanie równań przestępnych do równań algebraicznych	50
1.6.4.1. Definicja	50
1.6.4.2. Równania wykładnicze	50
1.6.4.3. Równania logarytmiczne	50
1.6.4.4. Równania trygonometryczne	51
1.6.4.5. Równania z funkcjami hiperbolicznymi	51
2. FUNKCJE I ICH PRZEDSTAWIENIA	52
2.1. Pojęcie funkcji	52
2.1.1. Definicja funkcji	52
2.1.1.1. Funkcje	52
2.1.1.2. Funkcje rzeczywiste	52
2.1.1.3. Funkcje wielu zmiennych	52
2.1.1.4. Funkcje zespolone	52
2.1.1.5. Inne funkcje	52
2.1.1.6. Funkcjonały	53
2.1.1.7. Funkcja i odwzorowanie	53
2.1.2. Metody definiowania funkcji rzeczywistych	54
2.1.2.1. Sposoby określania funkcji	54
2.1.2.2. Określenie analityczne funkcji rzeczywistych	54
2.1.3. Własności funkcji	55
2.1.3.1. Funkcje monotoniczne	55
2.1.3.2. Funkcje ograniczone	55
2.1.3.3. Ekstrema funkcji	56
2.1.3.4. Funkcje parzyste	56
2.1.3.5. Funkcje nieparzyste	56
2.1.3.6. Przedstawienie funkcji za pomocą jej części parzystej i nieparzystej	57
2.1.3.7. Funkcje okresowe	57
2.1.3.8. Funkcje odwrotne	57

2.1.4. Granica funkcji	58
2.1.4.1. Definicja granicy funkcji	58
2.1.4.2. Ciągowa definicja granicy funkcji	58
2.1.4.3. Kryterium zbieżności Cauchy'ego	58
2.1.4.4. Granice niewłaściwe	59
2.1.4.5. Lewostronna i prawostronna granica funkcji	59
2.1.4.6. Granica funkcji przy x dążącym do nieskończoności	59
2.1.4.7. Twierdzenia dotyczące granic funkcji	60
2.1.4.8. Rachunek granic	60
2.1.4.9. Uporządkowanie funkcji ze względu na ich wzrost, symbole Landaua	62
2.1.5. Ciągłość funkcji	63
2.1.5.1. Ciągłość i punkty nieciągłości	63
2.1.5.2. Definicja ciągłości	64
2.1.5.3. Najczęściej spotykane przykłady nieciągłości	64
2.1.5.4. Ciągłość i punkty nieciągłości funkcji elementarnych	65
2.1.5.5. Własności funkcji ciągłych	66
2.2. Funkcje elementarne	67
2.2.1. Funkcje algebraiczne	67
2.2.1.1. Wielomiany	68
2.2.1.2. Funkcje wymierne ułamkowe	68
2.2.1.3. Funkcje niewymierne	68
2.2.2. Funkcje przestępne	68
2.2.2.1. Funkcja wykładnicza	68
2.2.2.2. Funkcja logarytmiczna	68
2.2.2.3. Funkcje trygonometryczne	68
2.2.2.4. Funkcje cyklometryczne (odwrotne do funkcji trygonometrycznych)	69
2.2.2.5. Funkcje hiperboliczne	69
2.2.2.6. Funkcje odwrotne względem funkcji hiperbolicznych	69
2.2.3. Funkcje złożone	69
2.3. Wielomiany	69
2.3.1. Funkcje liniowe	69
2.3.2. Trójmian kwadratowy	70
2.3.3. Wielomian trzeciego stopnia	70
2.3.4. Wielomian n -tego stopnia	71
2.3.5. Funkcja potęgowa	71
2.4. Funkcje wymierne ułamkowe	72
2.4.1. Proporcjonalność odwrotna	72
2.4.2. Krzywa trzeciego stopnia, typu I	72
2.4.3. Krzywa trzeciego stopnia, typu II	73
2.4.4. Krzywa trzeciego stopnia, typu III	74
2.4.5. Potęga o wykładniku ujemnym	76
2.5. Funkcje niewymierne	76
2.5.1. Pierwiastek kwadratowy z funkcji liniowej	76
2.5.2. Pierwiastek kwadratowy z trójmianu kwadratowego	76
2.5.3. Funkcja potęgowa	77
2.6. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne	78
2.6.1. Funkcja wykładnicza	78
2.6.2. Funkcja logarytmiczna	79
2.6.3. Krzywa dzwonowa Gaussa	79

2.6.4. Sumy funkcji wykładniczych	79
2.6.5. Uogólniona krzywa dzwonowa Gaussa	80
2.6.6. Iloczyn funkcji potęgowej i wykładniczej	81
2.7. Funkcje trygonometryczne	82
2.7.1. Wprowadzenie	82
2.7.1.1. Definicje i wykresy	82
2.7.1.2. Dziedziny i przebieg wykresu	84
2.7.2. Podstawowe relacje dla funkcji trygonometrycznych	86
2.7.2.1. Związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi	86
2.7.2.2. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy dwóch kątów (wzory sumacyjne)	86
2.7.2.3. Funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta	87
2.7.2.4. Funkcje trygonometryczne kąta połówkowego	88
2.7.2.5. Suma i różnica funkcji trygonometrycznych	88
2.7.2.6. Iloczyny funkcji trygonometrycznych	88
2.7.2.7. Potęgi funkcji trygonometrycznych	89
2.7.3. Opis drgań harmoniczych	89
2.7.3.1. Sformułowanie problemu	89
2.7.3.2. Superpozycja drgań	90
2.7.3.3. Przedstawienie wektorowe drgań	90
2.7.3.4. Drgania tłumione	90
2.8. Funkcje cyklometryczne (funkcje arcus)	91
2.8.1. Definicja funkcji cyklometrycznych	91
2.8.2. Wartość główna	92
2.8.3. Relacje pomiędzy wartościami głównymi funkcji cyklometrycznych	93
2.8.4. Wzory dla argumentów ujemnych	93
2.8.5. Suma i różnica $\arcsin x$ i $\arcsin y$	93
2.8.6. Suma i różnica $\arccos x$ i $\arccos y$	93
2.8.7. Suma i różnica $\arctg x$ i $\arctg y$	94
2.8.8. Pewne szczególne relacje między $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$	94
2.9. Funkcje hiperboliczne	95
2.9.1. Definicja funkcji hiperbolicznych	95
2.9.2. Wykresy funkcji hiperbolicznych	96
2.9.2.1. Sinus hiperboliczny	96
2.9.2.2. Cosinus hiperboliczny	96
2.9.2.3. Tangens hiperboliczny	96
2.9.2.4. Cotangens hiperboliczny	96
2.9.3. Ważne wzory dla funkcji hiperbolicznych	96
2.9.3.1. Funkcje hiperboliczne tego samego argumentu	96
2.9.3.2. Przedstawienie jednej funkcji hiperbolicznej przez inne tego samego argumentu	97
2.9.3.3. Wzory dla ujemnych argumentów	97
2.9.3.4. Funkcje hiperboliczne sumy i różnicy dwóch argumentów	97
2.9.3.5. Funkcje hiperboliczne podwojonego argumentu	97
2.9.3.6. Wzory de Moivre'a dla funkcji hiperbolicznych	97
2.9.3.7. Funkcje hiperboliczne argumentu połówkowego	97
2.9.3.8. Sumy i różnice funkcji hiperbolicznych	98
2.9.3.9. Relacje między funkcjami hiperbolicznymi i trygonometrycznymi dla argumentów zespolonych	98

2.10. Funkcje odwrotne względem funkcji hiperbolicznych (funkcje area)	98
2.10.1. Definicje	98
2.10.1.1. Area sinus	98
2.10.1.2. Area cosinus	99
2.10.1.3. Area tangens	99
2.10.1.4. Area cotangens	99
2.10.2. Wyrażenie funkcji area za pomocą logarytmów wyrażen algebraicznych	100
2.10.3. Relacje między różnymi funkcjami area	100
2.10.4. Sumy i różnice funkcji area	100
2.10.5. Wzory dla ujemnych argumentów	101
2.11. Krzywe trzeciego stopnia	101
2.11.1. Parabola półsześcienne lub parabola Neila	101
2.11.2. Wersiera Agnesi	101
2.11.3. Liść Kartezjusza	102
2.11.4. Cysoida Dioklesa	102
2.11.5. Strofoida	103
2.12. Krzywe czwartego stopnia	103
2.12.1. Konchoida Nikomedesa	103
2.12.2. Uogólniona konchoida	104
2.12.3. Ślimak Pascala	105
2.12.4. Kardioda	105
2.12.5. Owale Cassiniego	106
2.12.6. Lemniskata Bernoulliego	107
2.13. Cykloidy	108
2.13.1. Cykloidy zwykłe	108
2.13.2. Cykloidy wydłużone i skrócone (trochoidy)	108
2.13.3. Epicykloida	109
2.13.4. Hipocykloida i asteroida	110
2.13.5. Epicykloida i hipocykloida, skrócona i wydłużona	110
2.14. Spirale	111
2.14.1. Spirala Archimedesza	111
2.14.2. Spirala hiperboliczna	112
2.14.3. Spirala logarytmiczna	112
2.14.4. Ewolwenta koła	113
2.14.5. Klotoida	113
2.15. Inne krzywe	114
2.15.1. Linia łańcuchowa	114
2.15.2. Traktrysa	114
2.16. Wyznaczanie wzorów krzywych empirycznych	115
2.16.1. Typowe procedury	115
2.16.1.1. Porównywanie wykresów	115
2.16.1.2. Rektyfikacja	115
2.16.1.3. Wyznaczanie parametrów	115
2.16.2. Najczęściej stosowane wzory empiryczne	116
2.16.2.1. Funkcja potęgowa	116
2.16.2.2. Funkcja wykładnicza	117
2.16.2.3. Trójmian kwadratowy	118
2.16.2.4. Funkcja homograficzna	118

2.16.2.5.	Pierwiastek kwadratowy z trójkątną kwadratową	118
2.16.2.6.	Uogólniona krzywa dzwonowa Gaussa	118
2.16.2.7.	Krzywa trzeciego stopnia typu II	119
2.16.2.8.	Krzywa trzeciego stopnia typu III	119
2.16.2.9.	Krzywa trzeciego stopnia typu I	120
2.16.2.10.	Iloczyn funkcji potęgowej i wykładniczej	120
2.16.2.11.	Suma funkcji wykładniczych	120
2.16.2.12.	W pełni przeliczony przykład	121

2.17 Skale i papiery funkcyjne 122

2.17.1.	Skale	122
2.17.2.	Papiery funkcyjne	123
2.17.2.1.	Zwykły papier logarytmiczny	124
2.17.2.2.	Papier podwójnie logarytmiczny	124
2.17.2.3.	Papier funkcyjny ze skalą odwrotną	125
2.17.2.4.	Uwaga	125

2.18. Funkcje wielu zmiennych 126

2.18.1.	Definicja i przedstawienie	126
2.18.1.1.	Przedstawienie funkcji wielu zmiennych	126
2.18.1.2.	Przedstawienia graficzne funkcji wielu zmiennych	126
2.18.2.	Obszary oznaczoności funkcji	127
2.18.2.1.	Obszar oznaczoności funkcji określonej wykresem	127
2.18.2.2.	Obszary dwuwymiarowe	127
2.18.2.3.	Obszary trój- i więcej wymiarowe	127
2.18.2.4.	Sposoby określania funkcji	128
2.18.2.5.	Postacie analitycznego określenia funkcji	129
2.18.2.6.	Zależności między funkcjami wielu zmiennych	130
2.18.3.	Granice	131
2.18.3.1.	Definicja	131
2.18.3.2.	Ścisłe sformułowanie	132
2.18.3.3.	Uogólnienie na przypadek funkcji wielu zmiennych	132
2.18.3.4.	Granice iterowane	132
2.18.4.	Ciągłość	132
2.18.5.	Własności funkcji ciągłych	133
2.18.5.1.	Twierdzenie Cauchy'ego	133
2.18.5.2.	Twierdzenie o wartości średniej	133
2.18.5.3.	Twierdzenie o ograniczoności funkcji	133
2.18.5.4.	Twierdzenie Weierstrassa o osiągnięciu kresów	133

2.19. Nomografia 133

2.19.1.	Nomogramy	133
2.19.2.	Nomogramy siatkowe	133
2.19.3.	Arkusze kolineacyjne	135
2.19.3.1.	Nomogram kolineacyjny z trzema skalami prostoliniowymi przechodzącymi przez jeden punkt	135
2.19.3.2.	Nomogram kolineacyjny zbudowany z dwu prostych równoległych i trzeciej nachylonej do nich prostej	135
2.19.3.3.	Nomogram kolineacyjny z dwiema skalami równoległymi i trzecią skalą krzywlinową	136
2.19.4.	Arkusze siatkowe dla więcej niż trzech zmiennych	137

3. GEOMETRIA	138
3.1. Planimetria	138
3.1.1. Pojęcia podstawowe	138
3.1.1.1. Punkt, prosta, promień, odcinek	138
3.1.1.2. Kąt płaski	138
3.1.1.3. Kąt między dwiema przecinającymi się prostymi	139
3.1.1.4. Pary kątów na dwu prostych równoległych przeciętych trzecią prostą	140
3.1.1.5. Miara w stopniach i miara łukowa kąta płaskiego	140
3.1.2. Geometryczna definicja funkcji trygonometrycznych i hiperbolicznych	141
3.1.2.1. Definicja funkcji trygonometrycznych	141
3.1.2.2. Geometryczna definicja funkcji hiperbolicznych	142
3.1.3. Trójkąt płaski	142
3.1.3.1. Twierdzenia dotyczące trójkąta płaskiego	142
3.1.3.2. Symetrie	143
3.1.4. Czworokąty na płaszczyźnie	145
3.1.4.1. Równoległobok	145
3.1.4.2. Prostokąt i kwadrat	146
3.1.4.3. Romb	146
3.1.4.4. Trapez	146
3.1.4.5. Ogólny czworokąt	147
3.1.4.6. Czworokąt cięciw	147
3.1.4.7. Czworokąt stycznych	148
3.1.5. Wielokąt (wieloboki)	148
3.1.5.1. Ogólny wielokąt	148
3.1.5.2. Wielokąt wypukłe foremne	148
3.1.5.3. Niektóre wielokąty foremne	149
3.1.6. Figury płaskie o symetrii obrotowej	149
3.1.6.1. Okrąg	149
3.1.6.2. Odcinek kołowy (segment koła) i wycinek kołowy (sektor koła)	152
3.1.6.3. Pierścień kołowy	152
3.2. Trygonometria płaska	153
3.2.1. Rozwiązywanie trójkątów	153
3.2.1.1. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych	153
3.2.1.2. Rozwiązywanie dowolnych trójkątów płaskich	153
3.2.2. Zastosowania w geodezji	155
3.2.2.1. Współrzędne geodezyjne	155
3.2.2.2. Kąt w geodezji	157
3.2.2.3. Zastosowania w technice pomiarowej	159
3.3. Stereometria	162
3.3.1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni	162
3.3.2. Kąty dwuścienne, kąty wielościenne, kąty bryłowe	163
3.3.3. Wielościany	164
3.3.4. Bryły ograniczone powierzchniami zakrzywionymi	168
3.4. Trygonometria sferyczna	171
3.4.1. Podstawowe pojęcia geometrii na powierzchni kuli	171
3.4.1.1. Krzywe, łuki i kąty na powierzchni kuli	171
3.4.1.2. Niektóre specjalne układy współrzędnych	173
3.4.1.3. Dwukąt sferyczny	175

3.4.1.4. Trójkąt sferyczny	176
3.4.1.5. Trójkąt biegunowy (polarny, dualny)	176
3.4.1.6. Trójkąty eulerowskie i nieeulerowskie	176
3.4.1.7. Kąt bryłowy trójsięcienny	177
3.4.2. Podstawowe własności trójkątów sferycznych	177
3.4.2.1. Twierdzenia ogólne	177
3.4.2.2. Wzory podstawowe i ich zastosowania	178
3.4.2.3. Inne wzory	181
3.4.3. Rozwiązywanie trójkątów sferycznych	182
3.4.3.1. Podstawowe typy zadań, dyskusja dokładności	182
3.4.3.2. Sferyczny trójkąt prostokątny	182
3.4.3.3. Dowolne trójkąty sferyczne	184
3.4.3.4. Krzywe sferyczne	188
3.5. Algebra wektorów i geometria analityczna	195
3.5.1. Algebra wektorów	195
3.5.1.1. Definicja wektora, wzory rachunkowe	195
3.5.1.2. Iloczyn skalarny i iloczyn wektorowy	198
3.5.1.3. Złożenia operacji na wektorach	200
3.5.1.4. Równania wektorowe	202
3.5.1.5. Kowariantne i kontrawariantne współrzędne wektora	203
3.5.1.6. Zastosowania algebry wektorów w geometrii	204
3.5.2. Geometria analityczna na płaszczyźnie	204
3.5.2.1. Płaskie układy współrzędnych i ich transformacje	204
3.5.2.2. Pewne szczególne punkty na płaszczyźnie	207
3.5.2.3. Prosta	210
3.5.2.4. Okrąg	213
3.5.2.5. Elipsa	214
3.5.2.6. Hiperbola	216
3.5.2.7. Parabola	219
3.5.2.8. Krzywe drugiego stopnia (krzywe stożkowe)	221
3.5.3. Geometria analityczna w przestrzeni	224
3.5.3.1. Podstawowe pojęcia, przestrzenne układy współrzędnych	224
3.5.3.2. Prosta i płaszczyzna w przestrzeni	231
3.5.3.3. Powierzchnie drugiego stopnia — równania w postaci normalnej (kanonicznej)	238
3.5.3.4. Powierzchnie stopnia drugiego — teoria ogólna	241
3.6. Geometria różniczkowa	243
3.6.1. Krzywe płaskie	243
3.6.1.1. Sposoby definiowania krzywych płaskich	243
3.6.1.2. Lokalne elementy krzywej płaskiej	244
3.6.1.3. Szczególne punkty krzywej oraz jej asymptoty	249
3.6.1.4. Badanie krzywej na podstawie jej równania	254
3.6.1.5. Ewoluty i ewolwenty	256
3.6.1.6. Obwiednia rodziny krzywych	256
3.6.2. Krzywe w przestrzeni	257
3.6.2.1. Sposoby określenia krzywych przestrzennych	257
3.6.2.2. Trójsięcin Freneta	258
3.6.2.3. Krzywizna i skręcenie (torsja)	261
3.6.3. Powierzchnie	263
3.6.3.1. Różne sposoby definiowania powierzchni	263

3.6.3.2. Płaszczyzna styczna i normalna do powierzchni	265
3.6.3.3. Infinitesimalny element liniowy na powierzchni	266
3.6.3.4. Krzywizna powierzchni	267
3.6.3.5. Powierzchnie prostokątne i rozwijalne	270
3.6.3.6. Linie geodezyjne na powierzchni	271
4. ALGEBRA LINIOWA	272
4.1. Macierze	272
4.1.1. Definicja macierzy	272
4.1.2. Macierze kwadratowe	273
4.1.3. Wektory	275
4.1.4. Działania na macierzach	275
4.1.5. Wzory rachunkowe	278
4.1.6. Normy na wektorach i macierzach	279
4.1.6.1. Normy na wektorach	280
4.1.6.2. Normy na macierzach	280
4.2. Wyznaczniki	281
4.2.1. Definicje	281
4.2.1.1. Wyznaczniki	281
4.2.1.2. Minor	281
4.2.2. Reguły i wzory rachunkowe dla wyznaczników	281
4.2.3. Obliczanie wyznaczników	283
4.3. Tensory	283
4.3.1. Transformacje układów współrzędnych	283
4.3.2. Tensory we współrzędnych kartezjańskich	284
4.3.3. Tensory o szczególnych własnościach	286
4.3.3.1. Tensory drugiego rzędu	286
4.3.3.2. Tensory niezmiennicze	287
4.3.4. Tensory w krzywoliniowych układach współrzędnych	288
4.3.4.1. Bazy kowariantne i kontrawariantne	288
4.3.4.2. Kowariantne i kontrawariantne współrzędne tensora pierwszego rzędu	289
4.3.4.3. Kowariantne, kontrawariantne i mieszane współrzędne tensorów drugiego rzędu	289
4.3.4.4. Reguły i wzory rachunkowe	291
4.3.5. Pseudotensory	291
4.3.5.1. Odbicie względem początku układu współrzędnych	291
4.3.5.2. Wprowadzenie pojęcia pseudotensora	292
4.4. Układy równań liniowych	293
4.4.1. Układy liniowe, procedura wymiany	293
4.4.1.1. Układy liniowe	293
4.4.1.2. Wymiana zmiennych	294
4.4.1.3. Liniowa zależność równań	295
4.4.1.4. Odwracanie macierzy	295
4.4.2. Rozwiązywanie układów równań liniowych	295
4.4.2.1. Definicja i warunki istnienia rozwiązań	295
4.4.2.2. Zastosowanie procedury wymiany	297
4.4.2.3. Wzory Cramera	298
4.4.2.4. Algorytm Gaussa	299

4.4.3. Nadokreślone układy równań liniowych	300
4.4.3.1. Nadokreślone układy równań liniowych i liniowe problemy minimalizacji sumy kwadratów	300
4.4.3.2. Uwagi dotyczące numerycznego rozwiązywania liniowego problemu najmniejszych kwadratów	301
4.5. Zagadnienie własne macierzy	302
4.5.1. Ogólne zagadnienie własne	302
4.5.2. Zagadnienie własne	302
4.5.2.1. Wielomian charakterystyczny	302
4.5.2.2. Rzeczywiste macierze symetryczne, transformacja podobieństwa	303
4.5.2.3. Diagonalizacja form kwadratowych	305
4.5.2.4. Wskazówki dotyczące numerycznego wyznaczania wartości własnych	307
4.5.3. Rozkład singularny	309
5. ALGEBRA I MATEMATYKA DYSKRETNA	311
5.1. Logika	311
5.1.1. Logika zdań, rachunek zdań	311
5.1.2. Wyrażenia logiki predykatów	314
5.2. Teoria mnogości (teoria zbiorów)	316
5.2.1. Pojęcie zbioru, zbiory szczególnego rodzaju	316
5.2.2. Operacje (działania) na zbiorach	317
5.2.3. Relacje i odwzorowania	320
5.2.4. Relacje równoważności i porządku	323
5.2.5. Moc zbiorów	324
5.3. Klasyczne struktury algebraiczne	325
5.3.1. Działania	325
5.3.2. Półgrupy	325
5.3.3. Grupy	326
5.3.3.1. Definicja i podstawowe własności	326
5.3.3.2. Podgrupy i produkty proste	327
5.3.3.3. Odwzorowania między grupami	329
5.3.4. Reprezentacje grup	330
5.3.4.1. Definicje	330
5.3.4.2. Reprezentacje szczególnego typu	331
5.3.4.3. Suma prosta reprezentacji	332
5.3.4.4. Iloczyn tensorowy reprezentacji (produkt prosty)	333
5.3.4.5. Reprezentacje przywiedlnie i nieprzywiedlnie	333
5.3.4.6. Pierwszy lemat Schura	334
5.3.4.7. Szereg Clebscha–Gordana	334
5.3.4.8. Pewna nieprzywiedlna reprezentacja grupy symetrycznej S_M	334
5.3.5. Zastosowania teorii grup	335
5.3.5.1. Operacje symetrii, elementy symetrii	335
5.3.5.2. Grupy symetrii	336
5.3.5.3. Operacje symetrii w cząsteczkach chemicznych	336
5.3.5.4. Grupy symetrii w krytalografii	338
5.3.5.5. Grupy symetrii w mechanice kwantowej	340
5.3.5.6. Inne przykłady zastosowań w fizyce	341
5.3.6. Pierścienie i ciała	341
5.3.6.1. Definicje	341

5.3.6.2. Podpierścienie, ideały	342
5.3.6.3. Homomorfizmy, izomorfizmy, twierdzenie o homomorfizmie	342
5.3.7. Przestrzenie wektorowe	343
5.3.7.1. Definicja	343
5.3.7.2. Zależność liniowa	344
5.3.7.3. Odzorowania liniowe	344
5.3.7.4. Podprzestrzenie, zależności między wymiarami	344
5.3.7.5. Przestrzenie (wektorowe) euklidesowe, norma euklidesowa	345
5.3.7.6. Operatory liniowe w przestrzeniach wektorowych	346
5.4. Elementarna teoria liczb	347
5.4.1. Podzielność	347
5.4.1.1. Podzielność i elementarne prawa podzielności	347
5.4.1.2. Liczby pierwsze	347
5.4.1.3. Kryteria (cechy) podzielności	349
5.4.1.4. Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność	350
5.4.1.5. Liczby Fibonacciego	352
5.4.2. Liniowe równania diofantyczne	353
5.4.3. Kongruencje i klasy reszt	354
5.4.4. Twierdzenia Fermata, Eulera i Wilsona	359
5.4.5. Kody (szyfry)	359
5.5. Kryptologia	362
5.5.1. Zadania kryptologii	362
5.5.2. Systemy szyfrowania	362
5.5.3. Ścisłe definicje matematyczne	363
5.5.4. Bezpieczeństwo systemów kryptograficznych	363
5.5.4.1. Metody klasycznej kryptologii	364
5.5.4.2. Szyfry przedstawieniowe	365
5.5.4.3. Szyfry Vigenere'a	365
5.5.4.4. Podstawienia macierzowe	365
5.5.5. Metody klasycznej kryptoanalizy	366
5.5.5.1. Analiza statystyczna	366
5.5.5.2. Test Kasiskiego–Friedmana	366
5.5.6. Szyfr typu <i>one-time-tape</i>	367
5.5.7. Szyfry z kluczem o publicznym dostępie	367
5.5.7.1. Metoda Diffiego i Hellmana	367
5.5.7.2. Funkcje jednokierunkowe	368
5.5.7.3. Szyfr RSA	368
5.5.8. Algorytm DES (Data Encryption Standard)	369
5.5.9. Algorytm IDEA (International Data Encryption Algorithm)	369
5.6. Algebra uniwersalna	370
5.6.1. Definicja	370
5.6.2. Kongruencje, algebry ilorazowe	370
5.6.3. Homomorfizmy	371
5.6.4. Twierdzenie o homomorfizmie	371
5.6.5. Rozmaiatości algebr	371
5.6.6. Algebry termów (algebry wolne)	372
5.7. Algebra Boole'a i algebry przełączników	372
5.7.1. Definicja	372
5.7.2. Twierdzenie o dualności	373
5.7.3. Skończone algebry Boole'a	373

5.7.4. Algebry Boole'a jako zbiory uporządkowane	374
5.7.5. Funkcje boolowskie, wyrażenia boolowskie	374
5.7.6. Postać normalna	376
5.7.7. Algebra połączeń	376
5.8. Algorytmy teorii grafów	378
5.8.1. Podstawowe pojęcia i oznaczenia	378
5.8.2. Drogi w grafach nieskierowanych	382
5.8.2.1. Drogi	382
5.8.2.2. Grafy eulerskie	383
5.8.2.3. Cykle Hamiltona	384
5.8.3. Drzewa i drzewa rozpinające	385
5.8.3.1. Drzewa	385
5.8.3.2. Drzewa rozpinające grafu G	386
5.8.4. Skojarzenia	387
5.8.5. Grafy płaskie i planarne	388
5.8.6. Ścieżki w grafach skierowanych (digrafach)	389
5.8.7. Sieci transportowe	390
5.9. Logika rozmyta	392
5.9.1. Podstawy logiki rozmytej	392
5.9.1.1. Interpretacja zbiorów rozmytych	392
5.9.1.2. Funkcje przynależności	393
5.9.1.3. Zbiory rozmyte	395
5.9.2. Działania na zbiorach rozmytych	397
5.9.2.1. Pojęcie działania (agregacji) na zbiorach rozmytych	397
5.9.2.2. Działania na zbiorach rozmytych w praktyce rachunkowej	398
5.9.2.3. Operatory kompensacyjne	400
5.9.2.4. Warunki rozszerzania pojęć na zbiory rozmyte	400
5.9.2.5. Dopelnienie dla zbiorów rozmytych	401
5.9.3. Relacje rozmyte	401
5.9.3.1. Relacje rozmyte	401
5.9.3.2. Złożenie relacji rozmytych $R \circ S$	404
5.9.4. Wnioskowanie rozmyte	405
5.9.5. Wyostrzanie (konkretyzacja)	407
5.9.6. Układy sterowania (regulacji) rozmytego	407
5.9.6.1. Metoda Mamdaniego	408
5.9.6.2. Metoda Takagiego–Sugeno	408
5.9.6.3. Systemy sterowania	409
5.9.6.4. Układy interpolacyjne	412
6. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY	414
6.1. Różniczkowanie funkcji jednej zmiennej	414
6.1.1. Pochodna funkcji	414
6.1.2. Wzory na różniczkowanie funkcji jednej zmiennej	415
6.1.2.1. Pochodne funkcji elementarnych	415
6.1.2.2. Podstawowe wzory rachunku różniczkowego	415
6.1.3. Pochodne wyższych rzędów	421
6.1.3.1. Definicja pochodnych wyższych rzędów	421
6.1.3.2. Pochodne wyższych rzędów najprostszych funkcji	422
6.1.3.3. Wzór Leibniza	422
6.1.3.4. Pochodne wyższych rzędów funkcji określonych parametrycznie	423
6.1.3.5. Pochodne wyższych rzędów funkcji odwrotnej	423

6.1.4. Podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego	423
6.1.4.1. Warunki monotoniczności	423
6.1.4.2. Twierdzenie Fermata	424
6.1.4.3. Twierdzenie Rolle'a	424
6.1.4.4. Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej	425
6.1.4.5. Twierdzenie Taylora dla funkcji jednej zmiennej	425
6.1.4.6. Uogólnione twierdzenie o wartości średniej lub twierdzenie Cauchy'ego	426
6.1.5. Wyznaczanie ekstremów i punktów przegięcia	426
6.1.5.1. Maksima i minima	426
6.1.5.2. Warunki konieczne istnienia ekstremów lokalnych	426
6.1.5.3. Ekstrema lokalne funkcji różniczkowalnej zdefiniowanej wzorem $y = f(x)$	427
6.1.5.4. Wyznaczanie ekstremum globalnego	428
6.1.5.5. Wyznaczanie ekstremów funkcji zadanej w postaci uwikłanej	428
6.2. Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych	429
6.2.1. Pochodne cząstkowe	429
6.2.1.1. Pochodna cząstkowa	429
6.2.1.2. Interpretacja geometryczna w przypadku funkcji dwóch zmiennych	429
6.2.1.3. Pojęcie różniczki	429
6.2.1.4. Podstawowe własności różniczki	430
6.2.1.5. Różniczka cząstkowa	430
6.2.2. Różniczka zupełna i różniczki wyższych rzędów	430
6.2.2.1. Pojęcie różniczki zupełnej funkcji wielu zmiennych	430
6.2.2.2. Pochodne i różniczki wyższych rzędów	432
6.2.2.3. Twierdzenie Taylora dla funkcji wielu zmiennych	433
6.2.3. Wzory na różniczkowanie funkcji wielu zmiennych	434
6.2.3.1. Różniczkowanie funkcji złożonych	434
6.2.3.2. Różniczkowanie funkcji zdefiniowanej w sposób uwikłany	434
6.2.4. Zamiana zmiennych w wyrażeniach różniczkowych oraz transformacje współrzędnych	436
6.2.4.1. Funkcja jednej zmiennej	436
6.2.4.2. Funkcja dwóch zmiennych	437
6.2.5. Ekstrema funkcji wielu zmiennych	438
6.2.5.1. Definicja	438
6.2.5.2. Interpretacja geometryczna	438
6.2.5.3. Wyznaczanie ekstremum funkcji dwóch zmiennych	439
6.2.5.4. Wyznaczanie ekstremum funkcji n zmiennych	439
6.2.5.5. Rozwiązywanie problemów aproksymacji	439
6.2.5.6. Wyznaczanie ekstremów związanych lub warunkowych	439
7. SZEREGI NIESKOŃCZONE	441
7.1. Ciągi liczbowe	441
7.1.1. Własności ciągów liczbowych	441
7.1.1.1. Definicja ciągu liczbowego	441
7.1.1.2. Ciągi monotoniczne	441
7.1.1.3. Ciągi ograniczone	442
7.1.2. Granica ciągu liczbowego	442
7.2. Szeregi liczbowe	443
7.2.1. Ogólne twierdzenia dotyczące zbieżności szeregów	443
7.2.1.1. Zbieżność i rozbieżność szeregów	443
7.2.1.2. Ogólne twierdzenia dotyczące szeregów zbieżnych	444

7.2.2. Kryteria zbieżności szeregów dodatnich	444
7.2.2.1. Kryterium porównawcze	444
7.2.2.2. Kryterium ilorazowe d'Alemberta	445
7.2.2.3. Kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego	445
7.2.2.4. Kryterium całkowe (Cauchy'ego)	446
7.2.3. Szeregi bezwzględnie (absolutnie) i warunkowo zbieżne	446
7.2.3.1. Definicja	446
7.2.3.2. Własności szeregów bezwzględnie zbieżnych	447
7.2.3.3. Szeregi naprzemienne	447
7.2.4. Pewne szczególne szeregi	448
7.2.4.1. Sumy niektórych szeregów liczbowych	448
7.2.4.2. Liczby Bernoulliego i liczby Eulera	449
7.2.5. Szacowanie reszty szeregów zbieżnych	451
7.2.5.1. Szacowanie za pomocą szeregu majoryzującego	451
7.2.5.2. Szeregi naprzemienne zbieżne	451
7.2.5.3. Szczególne szeregi	451
7.3. Szeregi funkcyjne	452
7.3.1. Definicje	452
7.3.2. Zbieżność jednostajna	452
7.3.2.1. Definicja, twierdzenie Weierstrassa	452
7.3.2.2. Własności szeregów zbieżnych jednostajnie	453
7.3.3. Szeregi potęgowe	454
7.3.3.1. Definicja. Zbieżność	454
7.3.3.2. Działania na szeregach potęgowych	454
7.3.3.3. Rozwinięcie w szereg Taylora, szereg Maclaurina	456
7.3.4. Wzory przybliżone	458
7.3.5. Asymptotyczne szeregi potęgowe	458
7.3.5.1. Równość w sensie asymptotycznym	457
7.3.5.2. Asymptotyczne szeregi potęgowe	457
7.4. Szeregi Fouriera	459
7.4.1. Sumy trygonometryczne i szeregi Fouriera	459
7.4.1.1. Pojęcia podstawowe	459
7.4.1.2. Najważniejsze własności szeregów Fouriera	460
7.4.2. Wyznaczanie współczynników Fouriera dla funkcji o pewnym typie symetrii	461
7.4.2.1. Typy symetrii funkcji. Wzory na współczynniki szeregu Fouriera	461
7.4.2.2. Różne postacie rozwinięcia w szereg Fouriera	462
7.4.3. Wyznaczanie współczynników Fouriera za pomocą metod numerycznych	463
7.4.4. Szereg Fouriera i całka Fouriera	463
7.4.5. Uwagi do tabeli zawierającej rozkłady w szereg Fouriera	464
8. RACHUNEK CAŁKOWY	465
8.1. Całka oznaczona	465
8.1.1. Funkcja pierwotna lub całka nieoznaczona	465
8.1.1.1. Całka nieoznaczona	465
8.1.1.2. Całki funkcyjne elementarnych	466
8.1.2. Wzory na całkowanie	466
8.1.3. Całkowanie funkcji wymiernych	470
8.1.3.1. Całkowanie wielomianów	470

8.1.3.2. Całki funkcji ułamkowych (wymiernych)	470
8.1.3.3. Cztery przypadki mogące pojawić się przy rozkładzie na ułamki proste	470
8.1.4. Całkowanie funkcji niewymiernych	473
8.1.4.1. Podstawienia mające sprowadzić zadanie do całek funkcji wymiennych	473
8.1.4.2. Całkowanie wyrażeń dwumiennych	474
8.1.4.3. Całki eliptyczne	475
8.1.5. Całkowanie funkcji trygonometrycznych	476
8.1.5.1. Podstawienia	476
8.1.5.2. Metody uproszczone w niektórych często spotykanych przypadkach	477
8.1.6. Całkowanie funkcji przestępnych	478
8.1.6.1. Całki zawierające funkcje wykładnicze	478
8.1.6.2. Całki funkcji hiperbolicznych	478
8.1.6.3. Zastosowanie całkowania przez części	478
8.1.6.4. Całki funkcji przestępnych	479
8.2. Całka oznaczona	479
8.2.1. Podstawowe pojęcia, wzory i twierdzenia	479
8.2.1.1. Definicja i istnienie całki oznaczonej	479
8.2.1.2. Własności całki oznaczonej	480
8.2.1.3. Inne twierdzenia dotyczące granic całkowania	483
8.2.1.4. Obliczanie całek oznaczonych	484
8.2.2. Zastosowania całek oznaczonych	487
8.2.2.1. Ogólny schemat zastosowania całki oznaczonej	487
8.2.2.2. Zastosowania w geometrii	488
8.2.2.3. Zastosowania w mechanice i fizyce	491
8.2.3. Całki niewłaściwe. Całka Stieltjesa i całka Lebesgue'a	493
8.2.3.1. Uogólnienia pojęcia całki	493
8.2.3.2. Całki z nieskończonymi granicami całkowania	494
8.2.3.3. Całki funkcji nieograniczonych	497
8.2.4. Całki zależne od parametru	499
8.2.4.1. Definicja całki z parametrem	499
8.2.4.2. Różniczkowanie pod znakiem całki	499
8.2.4.3. Całkowanie pod znakiem całki	500
8.2.5. Całkowanie przez rozwinięcie w szereg, funkcje specjalne	501
8.3. Całki krzywoliniowe	503
8.3.1. Całki krzywoliniowe pierwszego rodzaju	503
8.3.1.1. Definicje	503
8.3.1.2. Twierdzenie o istnieniu	505
8.3.1.3. Obliczanie całek krzywoliniowych pierwszego rodzaju	505
8.3.1.4. Zastosowania całek krzywoliniowych pierwszego rodzaju	505
8.3.2. Całka krzywoliniowa drugiego rodzaju	506
8.3.3. Całki krzywoliniowe trzeciego rodzaju	508
8.3.4. Warunki niezależności całki krzywoliniowej od drogi całkowania	510
8.4. Całki wielokrotne	512
8.4.1. Całka podwójna	512
8.4.1.1. Pojęcie całki podwójnej	512
8.4.1.2. Obliczanie całek podwójnych	513
8.4.1.3. Zastosowania całek podwójnych	516
8.4.2. Całki potrójne	516
8.4.2.1. Pojęcie całki potrójnej	517

8.4.2.2. Obliczanie całek potrójnych	518
8.4.2.3. Zastosowania całek potrójnych	521
8.5. Całki powierzchniowe	521
8.5.1. Całki powierzchniowe pierwszego rodzaju	521
8.5.1.1. Pojęcie całki powierzchniowej pierwszego rodzaju	521
8.5.1.2. Obliczanie całek powierzchniowych pierwszego rodzaju	523
8.5.1.3. Zastosowania całek powierzchniowych pierwszego rodzaju	525
8.5.2. Całki powierzchniowe drugiego rodzaju	525
8.5.2.1. Pojęcie całki powierzchniowej drugiego rodzaju	525
8.5.2.2. Obliczanie całek powierzchniowych drugiego rodzaju	526
8.5.2.3. Pewne szczególne zastosowanie całek powierzchniowych	528
9. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE	529
9.1. Równania różniczkowe zwyczajne	529
9.1.1. Równania różniczkowe pierwszego rzędu	530
9.1.1.1. Twierdzenie o istnieniu, pole kierunkowe	530
9.1.1.2. Podstawowe metody rozwiązywania równań różniczkowych	531
9.1.1.3. Równania różniczkowe uwikłane	534
9.1.1.4. Całki osobliwe i punkty osobliwe	535
9.1.1.5. Przybliżone metody rozwiązywania równań różniczkowych pierwszego rzędu	539
9.1.2. Równania różniczkowe wyższych rzędów oraz układy równań różniczkowych	541
9.1.2.1. Wstępne rozważania	541
9.1.2.2. Obniżanie rzędu równania	542
9.1.2.3. Równania różniczkowe liniowe n -tego rzędu	544
9.1.2.4. Rozwiązywanie równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach	546
9.1.2.5. Układy równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach	549
9.1.2.6. Równania różniczkowe liniowe drugiego rzędu	552
9.1.3. Zagadnienia brzegowe	559
9.1.3.1. Sformułowanie zagadnienia	559
9.1.3.2. Podstawowe własności funkcji własnych i wartości własnych	560
9.1.3.3. Rozwinięcie na funkcje własne	561
9.1.3.4. Przypadki osobliwe	561
9.2. Równania różniczkowe cząstkowe	562
9.2.1. Równania różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu	562
9.2.1.1. Równania różniczkowe cząstkowe liniowe pierwszego rzędu	562
9.2.1.2. Nieliniowe równania różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu	564
9.2.2. Równania różniczkowe cząstkowe liniowe drugiego rzędu	567
9.2.2.1. Klasyfikacja i właściwości równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu w przypadku dwóch zmiennych niezależnych	567
9.2.2.2. Klasyfikacja i własności równań różniczkowych drugiego rzędu więcej niż dwóch zmiennych	569
9.2.2.3. Metody rozwiązywania liniowych równań różniczkowych drugiego rzędu	570
9.2.3. Równania różniczkowe cząstkowe w naukach przyrodniczych i technice	581
9.2.3.1. Postawienie problemu i warunki brzegowe	581
9.2.3.2. Równanie falowe	583
9.2.3.3. Równanie przewodnictwa cieplnego i równanie dyfuzji w ośrodku jednorodnym	584

9.2.3.4. Równanie potencjału	585
9.2.3.5. Równanie Schrödingera	585
9.2.4. Równania cząstkowe nieliniowe, solitony	594
9.2.4.1. Kontekst fizyczno-matematyczny	594
9.2.4.2. Równanie Kortewega-de Vriesa	596
9.2.4.3. Nieliniowe równanie Schrödingera	597
9.2.4.4. Równanie sinus Gordona	598
9.2.4.5. Inne ważne nieliniowe równania ewolucji z rozwiązaniami solitonowymi	599

10. RACHUNEK WARIACYJNY 601

10.1. Sformułowanie problemu 601

10.2. Zagadnienia historyczne 602

10.2.1. Zagadnienia izoperymetryczne 602

10.2.2. Zagadnienie brachistochrony 603

10.3. Zagadnienia wariacyjne dla funkcji wielu zmiennych 603

10.3.1. Proste zagadnienie wariacyjne i ekstremale 603

10.3.2. Równanie Eulera dla danego zagadnienia wariacyjnego 603

10.3.3. Zagadnienia brzegowe z warunkami pobocznymi (więzami) 605

10.3.4. Zagadnienia wariacyjne zawierające wyższe pochodne 606

10.3.5. Zagadnienie wariacyjne z większą liczbą funkcji niewiadomych 607

10.3.6. Zagadnienia wariacyjne w przedstawieniu parametrycznym 607

10.4. Zagadnienia wariacyjne dla funkcji wielu zmiennych 608

10.4.1. Proste zagadnienie wariacyjne 608

10.4.2. Ogólne zagadnienie wariacyjne 610

10.5. Numeryczne rozwiązywanie zagadnień wariacyjnych 610

10.6. Uzupełnienia 611

10.6.1. Pierwsza i druga wariacja 611

10.6.2. Zastosowania w fizyce 612

11. RÓWNANIA CAŁKOWE LINIOWE 613

11.1. Wprowadzenie i klasyfikacja 613

11.2. Równania całkowe Fredholma drugiego rodzaju 614

11.2.1. Równania z jądrem zdegenerowanym 614

11.2.2. Iteracyjne metody aproksymacji rozwiązań. Szereg Neumanna 617

11.2.3. Metoda Fredholma. Twierdzenia Fredholma 620

11.2.3.1. Metoda Fredholma 620

11.2.3.2. Twierdzenia Fredholma 622

11.2.4. Numeryczne metody rozwiązywania równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju. 623

11.2.4.1. Aproksymacja całki 623

11.2.4.2. Aproksymacja jądra 626

11.2.4.3. Metoda kolokacji 628

11.3. Równanie całkowe Fredholma pierwszego rodzaju 629

11.3.1. Równania całkowe z jądrem zdegenerowanym 629

11.3.2. Pojęcia elementarne, podstawy teoretyczne 630

11.3.3. Sprowadzanie równania całkowego do układu równań liniowych 632

11.3.4. Rozwiązywanie równań całkowych jednorodnych pierwszego rodzaju 634

11.3.5.	Konstrukcja dwóch szczególnie wygodnych dla danego jądra całkowego układów ortonormalnych	635
11.3.6.	Metoda iteracyjna	636
11.4.	Równanie Volterra	637
11.4.1.	Podstawy teoretyczne	637
11.4.2.	Rozwiązywanie równań Volterra przez ich różniczkowanie	638
11.4.3.	Metoda szeregu Neumanna w zastosowaniu do równań Volterra drugiego rodzaju	639
11.4.4.	Równania Volterra typu splotowego	640
11.4.5.	Numeryczne metody rozwiązywania równań Volterra drugiego rodzaju	641
11.5.	Równania całkowe osobliwe	643
11.5.1.	Równanie całkowe Abela	644
11.5.2.	Równania całkowe osobliwe z jądrami Cauchy'ego	645
11.5.2.1.	Sformułowanie problemu	645
11.5.2.2.	Istnienie rozwiązań	646
11.5.2.3.	Własności całki Cauchy'ego	646
11.5.2.4.	Zagadnienie brzegowe Hilberta	646
11.5.2.5.	Rozwiązanie zagadnienia brzegowego Hilberta	647
11.5.2.6.	Rozwiązanie równania charakterystycznego	648
12.	ANALIZA FUNKCJONALNA	650
12.1.	Przestrzenie wektorowe	650
12.1.1.	Definicja przestrzeni wektorowej	650
12.1.2.	Podzbiory liniowe i afiniczne	651
12.1.3.	Elementy niezależne liniowo	653
12.1.4.	Zbiory wypukłe i powłoka wypukła	654
12.1.4.1.	Zbiory wypukłe	654
12.1.4.2.	Stożek	654
12.1.5.	Operatory i funkcjonały liniowe	655
12.1.5.1.	Odwzorowania	655
12.1.5.2.	Homomorfizm i endomorfizm	655
12.1.5.3.	Izomorfizm przestrzeni wektorowych	656
12.1.6.	Kompleksyfikacja przestrzeni wektorowej rzeczywistej	656
12.1.7.	Przestrzenie wektorowe uporządkowane	656
12.1.7.1.	Stożek i uporządkowanie częściowe	656
12.1.7.2.	Zbiory ograniczone względem relacji porządku	657
12.1.7.3.	Operatory dodatnie	657
12.1.7.4.	Kraty wektorowe	658
12.2.	Przestrzenie metryczne	659
12.2.1.	Definicja przestrzeni metrycznej	659
12.2.1.1.	Kule i otoczenia	660
12.2.1.2.	Zbieżność ciągów w przestrzeni metrycznej	661
12.2.1.3.	Zbiory domknięte i operacja domykania	661
12.2.1.4.	Podzbiory gęste i przestrzenie metryczne ośrodkowe	662
12.2.2.	Przestrzenie metryczne zupełne	662
12.2.2.1.	Ciągi Cauchy'ego	662
12.2.2.2.	Przestrzenie metryczne zupełne	663
12.2.2.3.	Niektóre fundamentalne twierdzenia dotyczące przestrzeni metrycznych zupełnych	663

12.2.2.4. Niektóre zastosowania twierdzenia Banacha o punkcie stałym	664
12.2.2.5. Uzupełnienie przestrzeni metrycznej	666
12.2.3. Operatory ciągłe	666
12.3. Przestrzenie unormowane	667
12.3.1. Definicja przestrzeni unormowanej	667
12.3.1.1. Aksjomaty przestrzeni unormowanych	667
12.3.1.2. Własności przestrzeni unormowanych	667
12.3.2. Przestrzenie Banacha	668
12.3.2.1. Szeregi w przestrzeni unormowanej	668
12.3.2.2. Przykłady przestrzeni Banacha	668
12.3.2.3. Przestrzenie Sobolewa	669
12.3.3. Przestrzenie unormowane uporządkowane	669
12.3.4. Algebry unormowane	670
12.4. Przestrzenie Hilberta	671
12.4.1. Definicja przestrzeni Hilberta	671
12.4.1.1. Iloczyn skalarny	671
12.4.1.2. Przestrzenie unitarne i niektóre ich własności	671
12.4.1.3. Przestrzenie Hilberta	671
12.4.2. Ortogonalność	672
12.4.2.1. Własności relacji ortogonalności	672
12.4.2.2. Układy ortogonalne	673
12.4.3. Szeregi ortogonalne (Fouriera) w przestrzeni Hilberta	673
12.4.3.1. Problem najlepszej aproksymacji	673
12.4.3.2. Tożsamość Parsevala i twierdzenie Riesz–Fischera	674
12.4.4. Istnienie bazy, izomorfizm przestrzeni Hilberta	675
12.5. Operatory i funkcjonały ograniczone	675
12.5.1. Ograniczoność, norma oraz ciągłość operatorów liniowych	675
12.5.1.1. Ograniczoność i norma operatora liniowego	675
12.5.1.2. Przestrzeń operatorów ograniczonych	675
12.5.1.3. Zbieżność ciągów operatorów	676
12.5.2. Operatory ograniczone w przestrzeniach Banacha	676
12.5.3. Elementy teorii spektralnej operatorów liniowych	678
12.5.3.1. Zbiór rezolwenty i rezolwenta operatora liniowego	678
12.5.3.2. Spektrum operatora	679
12.5.4. Funkcjonały liniowe ciągłe	680
12.5.4.1. Definicja	680
12.5.4.2. Funkcjonały liniowe ciągłe w przestrzeni Hilberta. Twierdzenie Riesz	681
12.5.4.3. Funkcjonały liniowe ciągłe w przestrzeniach L^p	681
12.5.5. Rozszerzanie funkcjonałów liniowych	681
12.5.6. Oddzielanie zbiorów wypukłych	682
12.5.7. Przestrzeń bidualna, przestrzenie refleksywne	683
12.6. Sprzężenie operatora w przestrzeniach unormowanych	683
12.6.1. Operator sprzężony do operatora ograniczonego	683
12.6.2. Operator sprzężony do operatora nieograniczonego	684
12.6.3. Operatory samosprężone	685
12.6.3.1. Operatory dodatnio określone	685
12.6.3.2. Rzuty w przestrzeni Hilberta	685
12.7. Zbiory zwarte i operatory zwarte	685
12.7.1. Podzbiory zwarte w przestrzeniach unormowanych	685
12.7.2. Operatory zwarte	686

12.7.2.1. Definicja operatora zwartego	686
12.7.2.2. Własności operatorów liniowych zwartych	686
12.7.2.3. Słaba zbieżność	686
12.7.3. Alternatywa Fredholma	687
12.7.4. Operatory zwarte w przestrzeni Hilberta	687
12.7.5. Operatory samosprężone zwarte	688
12.8. Operatory nieliniowe	688
12.8.1. Przykłady operatorów nieliniowych	688
12.8.2. Różniczkowalność operatorów nieliniowych	689
12.8.3. Algorytm (metoda) Newtona	690
12.8.4. Twierdzenie Schaudera o punkcie stałym	690
12.8.5. Teoria Leraya-Schaudera	691
12.8.6. Operatory nieliniowe dodatnie	691
12.8.7. Operatory monotoniczne w przestrzeniach Banacha	692
12.9. Miara i całka Lebesgue'a	693
12.9.1. Sigma-algebry i miary	693
12.9.2. Funkcje mierzalne	694
12.9.2.1. Definicja funkcji mierzalnej	694
12.9.2.2. Własności klasy funkcji mierzalnych	695
12.9.3. Całkowanie	695
12.9.3.1. Definicja całki	695
12.9.3.2. Pewne podstawowe własności całki	696
12.9.3.3. Twierdzenia o zbieżności	696
12.9.4. Przestrzenie L^p	697
12.9.5. Dystrybucje	698
12.9.5.1. Wzór na całkowanie przez części	698
12.9.5.2. Pochodna uogólniona	698
12.9.5.3. Dystrybucje	699
12.9.5.4. Pochodna dystrybucji	699
13. ANALIZA WEKTOROWA I TEORIA POLA	701
13.1. Podstawowe pojęcia teorii pola	701
13.1.1. Funkcje wektorowe zmiennej skalarnej	701
13.1.1.1. Definicje	701
13.1.1.2. Pochodna funkcji wektorowej	701
13.1.1.3. Reguły różniczkowania dla funkcji wektorowych	702
13.1.1.4. Rozwinięcie w szereg Taylora funkcji wektorowych	702
13.1.2. Pola skalarne	702
13.1.2.1. Pole skalarne	702
13.1.2.2. Ważne przykłady pól skalarnych	702
13.1.2.3. Przedstawienie pola skalarnego we współrzędnych	703
13.1.2.4. Poziomice i izopowierzchnie	703
13.1.3. Pola wektorowe	704
13.1.3.1. Pola wektorowe	704
13.1.3.2. Ważne przypadki pól wektorowych	705
13.1.3.3. Pola wektorowe we współrzędnych	706
13.1.3.4. Przejście od jednego układu współrzędnych do drugiego	706
13.1.3.5. Linie pola	708
13.2. Operacje różniczkowe w przestrzeni trójwymiarowej	708
13.2.1. Pochodna kierunkowa i objętościowa	708
13.2.1.1. Pochodna kierunkowa pola skalarnego	708

13.2.1.2.	Pochodna kierunkowa pola wektorowego	709
13.2.1.3.	Pochodna objętościowa (przestrzenna)	709
13.2.2.	Gradient pola skalarnego	710
13.2.2.1.	Definicja gradientu	710
13.2.2.2.	Gradient i pochodna kierunkowa	710
13.2.2.3.	Gradient i pochodna objętościowa	710
13.2.2.4.	Inne własności gradientu	710
13.2.2.5.	Gradient pola skalarnego w różnych układach współrzędnych	711
13.2.2.6.	Wzory rachunkowe	711
13.2.3.	Gradient pola wektorowego	712
13.2.4.	Dywergencja pola wektorowego	712
13.2.4.1.	Definicja dywergencji	712
13.2.4.2.	Dywergencja w różnych układach współrzędnych	712
13.2.4.3.	Wzory rachunkowe	713
13.2.4.4.	Dywergencja pola centralnego	713
13.2.5.	Rotacja pola wektorowego	713
13.2.5.1.	Definicja rotacji	713
13.2.5.2.	Rotacja w różnych układach współrzędnych	714
13.2.5.3.	Wzory pomocne przy obliczaniu rotacji	715
13.2.5.4.	Rotacja pola potencjalnego	715
13.2.6.	Operator nabla i operator Laplace'a	715
13.2.6.1.	Operator nabla	715
13.2.6.2.	Wzory rachunkowe z operatorem nabla	716
13.2.6.3.	Gradient wektorowy	716
13.2.6.4.	Dwukrotne zastosowanie operatora nabla	717
13.2.6.5.	Operator Laplace'a	717
13.2.7.	Przegląd (przestrzennych) operatorów różniczkowych	718
13.2.7.1.	Definicje oraz elementarne własności	718
13.2.7.2.	Wzory rachunkowe	718
13.2.7.3.	Przedstawienia analityczne we współrzędnych kartezjańskich, walcowych i sferycznych	719
13.3.	Całkowanie pól wektorowych	719
13.3.1.	Całki krzywoliniowe i potencjał pola wektorowego	719
13.3.1.1.	Całka krzywoliniowa pola wektorowego	719
13.3.1.2.	Zastosowania całki krzywoliniowej w mechanice	720
13.3.1.3.	Własności całki krzywoliniowej	721
13.3.1.4.	Całka funkcji wektorowej jako suma całek całek	721
13.3.1.5.	Całka pola wektorowego po pętli	721
13.3.1.6.	Pole potencjalne	721
13.3.2.	Całki powierzchniowe	723
13.3.2.1.	Wektor płata powierzchni płaskiej	723
13.3.2.2.	Obliczanie całek powierzchniowych	723
13.3.2.3.	Całki powierzchniowe oraz przepływ (strumień) pola	724
13.3.2.4.	Całki powierzchniowe we współrzędnych kartezjańskich jako całki powierzchniowe drugiego rodzaju	724
13.3.3.	Podstawowe twierdzenia całkowe	725
13.3.3.1.	Twierdzenie oraz wzór Gaussa	725
13.3.3.2.	Twierdzenie Stokesa	726
13.3.3.3.	Twierdzenia całkowe Greena	726
13.4.	Pewne szczególne pola	728
13.4.1.	Pole czysto źródłowe (pole źródeł)	728

13.4.2. Pole czysto wirowe (pole bezźródłowe)	728
13.4.3. Pola wektorowe z punktowymi źródłami	729
13.4.3.1. Pole kulombowskie i ładunek punktowy	729
13.4.3.2. Pole grawitacyjne i punkt materialny	729
13.4.4. Superpozycja pól	729
13.4.4.1. Dyskretny rozkład źródeł	729
13.4.4.2. Ciągły rozkład źródeł	730
13.4.4.3. Podsumowanie	730
13.5. Równania różniczkowe w teorii pola	730
13.5.1. Równanie różniczkowe Laplace'a	730
13.5.2. Równanie różniczkowe Poissona	730
14. TEORIA FUNKCJI	732
14.1. Funkcje jednej zmiennej zespolonej	732
14.1.1. Ciągłość i różniczkowalność	732
14.1.1.1. Definicja funkcji zespolonej	732
14.1.1.2. Granica funkcji zespolonej	732
14.1.1.3. Ciągłość funkcji zespolonej	733
14.1.1.4. Różniczkowalność funkcji zmiennej zespolonej	733
14.1.2. Funkcje analityczne	733
14.1.2.1. Definicja funkcji analitycznej	733
14.1.2.2. Przykłady funkcji analitycznych	733
14.1.2.3. Własności funkcji analitycznych	734
14.1.2.4. Punkty osobliwe	735
14.1.3. Odwzorowania konforemne	735
14.1.3.1. Definicja i własności odwzorowania konforemnego	735
14.1.3.2. Najprostsze odwzorowania konforemne	737
14.1.3.3. Reguła obrazów Schwarza	743
14.1.3.4. Potencjały zespolone	744
14.1.3.5. Zasada superpozycji	746
14.1.3.6. Ogólne odwzorowania płaszczyzny zespolonej	747
14.2. Całkowanie funkcji zespolonych	748
14.2.1. Całka oznaczona i nieoznaczona	748
14.2.1.1. Definicja całki funkcji zespolonej	748
14.2.1.2. Własności i metody obliczania całek funkcji zespolonych	749
14.2.2. Twierdzenie całkowite Cauchy'ego	750
14.2.2.1. Twierdzenie całkowite Cauchy'ego dla obszarów jednospójnych	750
14.2.2.2. Twierdzenie całkowite Cauchy'ego dla obszarów wielospójnych	750
14.2.3. Wzór całkowy Cauchy'ego	751
14.2.3.1. Funkcja analityczna wewnątrz obszaru jednospójnego	751
14.2.3.2. Funkcje analityczne na zewnątrz pewnego obszaru	752
14.3. Rozwinięcie funkcji analitycznej w szereg potęgowy	752
14.3.1. Zbieżność szeregów o wyrazach zespolonych	752
14.3.1.1. Zbieżność ciągów o wyrazach zespolonych	752
14.3.1.2. Zbieżność nieskończonego szeregu zespolonego	752
14.3.1.3. Zespolone szeregi potęgowe	753
14.3.2. Szereg Taylora	754
14.3.3. Rozszerzenia analityczne	754
14.3.4. Szereg Laurenta	755
14.3.5. Punkty osobliwe izolowane i twierdzenia o residuach	755

14.3.5.1. Punkty osobiłwe izolowane	755
14.3.5.2. Funkcje meromorficzne	756
14.3.5.3. Funkcje eliptyczne	756
14.3.5.4. Residuum	757
14.3.5.5. Twierdzenie o residuach	757
14.4. Obliczanie całek rzeczywistych za pomocą zespolonych całek konturowych	757
14.4.1. Zastosowania wzorów całkowych Cauchy'ego	757
14.4.2. Zastosowanie twierdzenia o residuach	758
14.4.3. Zastosowanie lematu Jordana	759
14.4.3.1. Lemat Jordana	759
14.4.3.2. Przykłady	759
14.5. Funkcje algebraiczne i elementarne funkcje przestępne	762
14.5.1. Funkcje algebraiczne	762
14.5.2. Elementarne funkcje przestępne	762
14.5.3. Opis krzywych na płaszczyźnie zespolonej	765
14.6. Funkcje eliptyczne	766
14.6.1. Związek z całkami eliptycznymi	766
14.6.2. Funkcje Jacobiego	768
14.6.3. Funkcja theta	769
14.6.4. Funkcje Weierstrassa	770
15. TRANSFORMACJE CAŁKOWE	771
15.1. Pojęcie transformacji całkowej	771
15.1.1. Definicja ogólna	771
15.1.2. Pewne szczególne transformacje całkowe	771
15.1.3. Transformacje odwrotne	771
15.1.4. Liniowość transformacji całkowych	772
15.1.5. Transformacje całkowe funkcji wielu zmiennych	772
15.1.6. Zastosowania transformacji całkowych	772
15.2. Transformacja Laplace'a	774
15.2.1. Własności transformacji Laplace'a	774
15.2.1.1. Transformata Laplace'a, dziedzina oryginału i dziedzina obrazu	774
15.2.1.2. Wzory rachunkowe dla transformacji Laplace'a	775
15.2.1.3. Transformaty Laplace'a pewnych szczególnych funkcji	778
15.2.1.4. Funkcja delta Diraca i dystrybucje	781
15.2.2. Transformacja odwrotna	782
15.2.2.1. Wykorzystanie tabel	783
15.2.2.2. Rozkład na ułamki proste	783
15.2.2.3. Rozwinięcie w szereg	784
15.2.2.4. Wzór na transformatę odwrotną	785
15.2.3. Rozwiązywanie równań różniczkowych za pomocą transformacji Laplace'a	786
15.2.3.1. Równania różniczkowe zwyczajne o stałych współczynnikach	786
15.2.3.2. Równania różniczkowe zwyczajne o zmiennych współczynnikach	787
15.2.3.3. Równania różniczkowe cząstkowe	788
15.3. Transformacja Fouriera	789
15.3.1. Własności transformacji Fouriera	789
15.3.1.1. Wzór całkowy Fouriera	789
15.3.1.2. Transformacja Fouriera i odwrotna transformacja Fouriera	790

15.3.1.3. Wzory rachunkowe dla transformacji Fouriera	793
15.3.1.4. Transformaty pewnych szczególnych funkcji	796
15.3.2. Rozwiązywanie równań różniczkowych za pomocą transformacji Fouriera	797
15.3.2.1. Liniowe równania różniczkowe zwyczajne	797
15.3.2.2. Równania różniczkowe cząstkowe	798
15.4. Transformacja Z	799
15.4.1. Własności transformacji Z	800
15.4.1.1. Funkcje dyskretne	800
15.4.1.2. Definicja transformacji Z	800
15.4.1.3. Wzory rachunkowe	801
15.4.1.4. Związek z transformacją Laplace'a	803
15.4.1.5. Odwrotna transformacja Z	803
15.4.2. Zastosowania transformacji Z	804
15.4.2.1. Wyznaczanie ogólnych rozwiązań liniowych równań różnicowych	804
15.4.2.2. Równanie różnicowe drugiego rzędu (zagadnienie początkowe)	805
15.4.2.3. Równanie różnicowe drugiego rzędu (zagadnienie brzegowe)	806
15.5. Transformacje falkowe	807
15.5.1. Sygnały	807
15.5.2. Falki	807
15.5.3. Transformacje falkowe	808
15.5.4. Dyskretne transformacje falkowe	809
15.5.4.1. Szybkie transformacje falkowe	809
15.5.4.2. Transformacja dyskretna Haara	810
15.5.5. Transformacja Gabora	810
15.6. Funkcje Walsha	811
15.6.1. Funkcje schodkowe	811
15.6.2. Układy Walsha	811
16. RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA I STATYSTYKA MATEMATYCZNA	812
16.1. Kombinatoryka	812
16.1.1. Permutacje	812
16.1.2. Kombinacje	813
16.1.3. Wariacje	813
16.1.4. Zestawienie wzorów kombinatorycznych	814
16.2. Rachunek prawdopodobieństwa	814
16.2.1. Zdarzenia, częstość i prawdopodobieństwo	814
16.2.1.1. Zdarzenia losowe	814
16.2.1.2. Częstość i prawdopodobieństwo	816
16.2.1.3. Prawdopodobieństwo warunkowe. Twierdzenie Bayesa	817
16.2.2. Zmienne losowe, funkcja rozkładu	818
16.2.2.1. Zmienna losowa	818
16.2.2.2. Dystrybuenta	819
16.2.2.3. Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe. Nierówność Czebyszewa	820
16.2.2.4. Wielowymiarowe zmienne losowe	822
16.2.3. Dyskretne rozkłady prawdopodobieństwa	822
16.2.3.1. Rozkład dwumianowy	822
16.2.3.2. Rozkład hipergeometryczny	823
16.2.3.3. Rozkład Poissona	824

16.2.4. Rozkłady ciągłe	825
16.2.4.1. Rozkład normalny	825
16.2.4.2. Standardowy rozkład normalny (rozkład Gaussa)	826
16.2.4.3. Logarytmiczny rozkład normalny	827
16.2.4.4. Rozkład wykładniczy	827
16.2.4.5. Rozkład Weibulla	828
16.2.4.6. Rozkład χ^2	829
16.2.4.7. Rozkład Fishera	830
16.2.4.8. Rozkład Studenta	831
16.2.5. Prawa wielkich liczb. Twierdzenia graniczne	832
16.2.6. Procesy stochastyczne i łańcuchy stochastyczne	833
16.2.6.1. Podstawowe pojęcia. Łańcuchy Markowa	833
16.2.6.2. Procesy Poissona	835
16.3. Statystyka matematyczna	837
16.3.1. Funkcje próbek	838
16.3.1.1. Populacja, próbka, wektor losowy	838
16.3.1.2. Funkcja próbki	839
16.3.2. Statystyka opisowa	840
16.3.2.1. Statystyczne ujęcie mierzonych wielkości	840
16.3.2.2. Parametr statystyczny	842
16.3.3. Weryfikacja hipotez statystycznych	842
16.3.3.1. Testy na zgodność z rozkładem normalnym	843
16.3.3.2. Rozkład średniej wartości próbki	845
16.3.3.3. Przedział ufności dla wartości średniej	846
16.3.3.4. Przedział ufności dla wariancji	847
16.3.3.5. Weryfikacja hipotez statystycznych	847
16.3.4. Korelacja i regresja	848
16.3.4.1. Korelacja liniowa dwóch wielkości mierzalnych	848
16.3.4.2. Regresja liniowa dla dwóch mierzonych wielkości	849
16.3.4.3. Regresja wielowymiarowa	850
16.3.5. Metoda Monte Carlo	852
16.3.5.1. Symulacje	852
16.3.5.2. Liczby losowe	852
16.3.5.3. Przykład symulacji Monte Carlo	854
16.3.5.4. Zastosowania metody Monte Carlo w metodach numerycznych	855
16.3.5.5. Inne zastosowania metody Monte Carlo	857
16.4. Teoria błędów pomiarowych	857
16.4.1. Rodzaje błędów pomiarowych	857
16.4.1.1. Klasyfikacja błędów pomiarowych według cech jakościowych	857
16.4.1.2. Gęstość rozkładu błędów pomiarowych	858
16.4.1.3. Rozkład błędów pomiarowych według cech ilościowych	860
16.4.1.4. Określenie wyników pomiaru wraz z przedziałem błędów	863
16.4.1.5. Rachunek błędów dla pomiarów bezpośrednich o tej samej dokładności	864
16.4.1.6. Rachunek błędów dla bezpośrednich pomiarów o różnej dokładności	864
16.4.2. Propagacja błędów i analiza błędów	865
16.4.2.1. Propagacja błędów według Gaussa	865
16.4.2.2. Analiza błędów	867

17. UKŁADY DYNAMICZNE I CHAOS	868
17.1. Równania różniczkowe cząstkowe i odwzorowania	868
17.1.1. Układy dynamiczne	868
17.1.1.1. Pojęcia podstawowe	868
17.1.1.2. Zbiory niezmiennicze	870
17.1.2. Jakościowa teoria równań różniczkowych zwyczajnych	872
17.1.2.1. Istnienie potoku i struktury przestrzeni fazowej	872
17.1.2.2. Równania różniczkowe liniowe	873
17.1.2.3. Teoria stabilności	875
17.1.2.4. Rozmaitości niezmiennicze	879
17.1.2.5. Odwzorowanie Poincarégo	882
17.1.2.6. Pojęcie topologicznej równoważności równań różniczkowych	883
17.1.3. Dyskretny układ dynamiczny	884
17.1.3.1. Punkty stałe, orbity okresowe i zbiory graniczne	884
17.1.3.2. Rozmaitości niezmiennicze	885
17.1.3.3. Topologiczna sprzężoność układów dyskretnych	886
17.1.4. Stabilność strukturalna (sztywność)	886
17.1.4.1. Strukturalnie stabilne równania różniczkowe	886
17.1.4.2. Strukturalnie stabilne układy dyskretny	887
17.1.4.3. Własności typowe	888
17.2. Ilościowy opis atraktorów	889
17.2.1. Miara probabilistyczna na atraktorach	889
17.2.1.1. Miara niezmiennicza	889
17.2.1.2. Elementy teorii ergodycznej	890
17.2.2. Entropie	893
17.2.2.1. Entropia topologiczna	893
17.2.2.2. Entropia metryczna	893
17.2.3. Wykładniki Lapunowa	894
17.2.4. Wymiary	895
17.2.4.1. Wymiary metryczne	895
17.2.4.2. Wymiary oparte na mierze niezmienniczej	898
17.2.4.3. Lokalny wymiar Hausdorffa według Douady'ego i Oesterlégo	900
17.2.4.4. Przykłady atraktorów	901
17.2.5. Dziwne atraktory i chaos	903
17.2.6. Chaos dla odwzorowań jednowymiarowych	904
17.3. Teoria bifurkacji i przejścia do chaosu	904
17.3.1. Bifurkacje w układach Morse'a–Smale'a	904
17.3.1.1. Bifurkacje lokalne wokół punktów stałych	905
17.3.1.2. Lokalne bifurkacje wokół orbity okresowej	910
17.3.1.3. Bifurkacje globalne	914
17.3.2. Przejścia do chaosu	914
17.3.2.1. Kaskada podwojeń okresu	915
17.3.2.2. Intermitencja	915
17.3.2.3. Globalne bifurkacje homokliniczne	916
17.3.2.4. Rozszczepienie torusa	917
18. TEORIA OPTYMALIZACJI	923
18.1. Optymalizacja liniowa	923
18.1.1. Sformułowanie problemu i interpretacja geometryczna	923

18.1.1.1. Rodzaje optymalizacji	923
18.1.1.2. Przykłady i rozwiązania graficzne	924
18.1.2. Podstawowe pojęcia optymalizacji liniowej, postać normalna	926
18.1.2.1. Wierzchołek i baza	926
18.1.2.2. Postać normalna liniowego zagadnienia optymalizacji	927
18.1.3. Metoda sympleksów	929
18.1.3.1. Tablica sympleksów	929
18.1.3.2. Przejście do nowej tablicy sympleksów	929
18.1.3.3. Wyznaczenie pierwszej tablicy sympleksów	931
18.1.3.4. Zmodyfikowana metoda sympleksów	932
18.1.3.5. Dualność w optymalizacji liniowej	934
18.1.4. Pewne szczególne liniowe problemy optymalizacji	935
18.1.4.1. Zagadnienie transportu	935
18.1.4.2. Zagadnienie przyporządkowania	938
18.1.4.3. Zagadnienie rozkładu	938
18.1.4.4. Problem komiwojażera	939
18.1.4.5. Problem kolejkowe	939
18.2. Optymalizacja nieliniowa	939
18.2.1. Sformułowanie problemu i podstawy teoretyczne	939
18.2.1.1. Sformułowanie problemu	939
18.2.1.2. Warunki optymalności	940
18.2.1.3. Dualność w optymalizacji	941
18.2.2. Pewne szczególne nieliniowe zagadnienia optymalizacji	941
18.2.2.1. Optymalizacja wypukła	941
18.2.2.2. Optymalizacja kwadratowa	942
18.2.3. Metody rozwiązywania kwadratowych zagadnień optymalizacji	943
18.2.3.1. Metoda Wolfo	943
18.2.3.2. Metoda Hildretha-d'Esopo	945
18.2.4. Metody numeryczne	946
18.2.4.1. Przypadek jednowymiarowy	946
18.2.4.2. Poszukiwanie minimum w n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej	947
18.2.5. Metody dla zagadnień bez więzów	947
18.2.5.1. Metoda największego spadku (metoda gradientu)	947
18.2.5.2. Zastosowanie metody Newtona	948
18.2.5.3. Metoda gradientów sprzężonych	948
18.2.5.4. Metoda Davidona, Fletchera i Powella (DFP)	949
18.2.6. Metoda gradientu w problemach z więzami w postaci nierówności	949
18.2.6.1. Metoda kierunków dopuszczalnych	950
18.2.6.2. Metoda gradientów rzutowanych	952
18.2.7. Metoda kar i metoda barier	954
18.2.7.1. Metoda kar	954
18.2.7.2. Metoda barier	955
18.2.8. Metoda cięć	956
18.3. Dyskretna optymalizacja dynamiczna	957
18.3.1. Dyskretna optymalizacja dynamiczna	957
18.3.1.1. n -poziomowe procesy decyzyjne	957
18.3.1.2. Dynamiczne zagadnienia optymalizacji	957
18.3.2. Przykłady dyskretnych modeli decyzyjnych	958
18.3.2.1. Zagadnienie zakupu	958
18.3.2.2. Zagadnienie plecaka	958

18.3.3. Równanie funkcjonalne Bellmanna	958
18.3.3.1. Własności funkcji kosztów	958
18.3.3.2. Wyprowadzenie równań funkcjonalnych Bellmanna	958
18.3.4. Zasada optymalności Bellmanna	960
18.3.5. Metoda równań funkcjonalnych Bellmanna	960
18.3.5.1. Wyznaczenie minimalnych kosztów	960
18.3.5.2. Wyznaczanie strategii optymalnej	960
18.3.6. Przykłady zastosowań metody równań funkcjonalnych	961
18.3.6.1. Optymalna strategia zakupu	961
18.3.6.2. Zagadnienie plecaka	962
19. METODY NUMERYCZNE	964
19.1. Numeryczne rozwiązywanie równań nieliniowych z jedną niewiadomą	964
19.1.1. Procedura iteracji	964
19.1.1.1. Zwyczajna metoda iteracji	965
19.1.1.2. Metoda Newtona	965
19.1.1.3. Metoda interpolacji liniowej	966
19.1.2. Rozwiązywanie równań wielomianowych	967
19.1.2.1. Schemat Hornera	967
19.1.2.2. Położenie miejsc zerowych	969
19.1.2.3. Metody numeryczne	970
19.2. Numeryczne rozwiązywanie układów równań	970
19.2.1. Układy równań liniowych	971
19.2.1.1. Rozkład trójkątny macierzy	971
19.2.1.2. Metoda Cholesky'ego dla symetrycznej macierzy współczynników	974
19.2.1.3. Metoda ortogonalizacji	974
19.2.1.4. Metoda Jacobiego i metoda Gaussa-Seidela	976
19.2.2. Układy równań nieliniowych	978
19.2.2.1. Zwyczajna metoda iteracyjna	978
19.2.2.2. Metoda Newtona	978
19.2.2.3. Bezróżniczkowa metoda Gaussa-Newtona	979
19.3. Całkowanie numeryczne	980
19.3.1. Ogólne wzory kwadraturowe	980
19.3.2. Kwadratury interpolacyjne	980
19.3.2.1. Wzór prostokątów	981
19.3.2.2. Wzór trapezów	981
19.3.2.3. Wzór trapezów Hermite'a	981
19.3.2.4. Wzór Simpsona	982
19.3.3. Wzory kwadraturowe typu Gaussa	982
19.3.3.1. Wzory kwadraturowe Gaussa	982
19.3.3.2. Wzory kwadraturowe Lobatto	983
19.3.4. Metoda Romberga	983
19.3.4.1. Algorytm metody Romberga	983
19.3.4.2. Zasada ekstrapolacji	984
19.4. Przybliżone całkowanie równań różniczkowych zwyczajnych	986
19.4.1. Zagadnienia początkowe	986
19.4.1.1. Metoda łamanej Eulera	986
19.4.1.2. Metoda Rungego-Kutty	987
19.4.1.3. Metody wielokrokowe	987

19.4.1.4.	Metoda prognostyka i korektora	988
19.4.1.5.	Zbieżność, konsystencja, stabilność	989
19.4.2.	Zagadnienia brzegowe	990
19.4.2.1.	Metoda różnicowa	990
19.4.2.2.	Metoda postulowania postaci rozwiązania	991
19.4.2.3.	Metoda strzałów	993
19.5.	Przybliżone całkowanie równań różniczkowych cząstkowych	993
19.5.1.	Metoda różnicowa	993
19.5.2.	Metoda postulowania rozwiązań	995
19.5.3.	Metoda elementów skończonych (FEM)	996
19.6.	Aproksymacja, dopasowanie, analiza harmoniczna	1000
19.6.1.	Interpolacja wielomianami	1000
19.6.1.1.	Wzór interpolacyjny Newtona	1001
19.6.1.2.	Wzór interpolacyjny Lagrange'a	1001
19.6.1.3.	Interpolacja według Aitkena–Neville'a	1002
19.6.2.	Aproksymacja w normie kwadratowej	1003
19.6.2.1.	Zagadnienie ciągłe, równania normalne	1003
19.6.2.2.	Zagadnienie dyskretne, równania normalne, metoda Householdera	1004
19.6.2.3.	Zagadnienia wielowymiarowe	1005
19.6.2.4.	Nieliniowe zagadnienia średniej kwadratowej	1006
19.6.3.	Aproksymacja Czebyszewa	1007
19.6.3.1.	Sformułowanie zagadnienia i twierdzenie o alternantach	1007
19.6.3.2.	Własności wielomianów Czebyszewa	1008
19.6.3.3.	Algorytm Remesa	1009
19.6.3.4.	Dyskretna aproksymacja Czebyszewa i optymalizacja	1010
19.6.4.	Analiza harmoniczna	1011
19.6.4.1.	Wzory na interpolację trygonometryczną	1011
19.6.4.2.	Szybka transformacja Fouriera (FFT)	1012
19.7	Przedstawienie krzywych i powierzchni za pomocą funkcji sklejących	1016
19.7.1.	Sześciennne funkcje sklejące	1016
19.7.1.1.	Interpolacyjne funkcje sklejące	1016
19.7.1.2.	Dopasowujące funkcje sklejące	1017
19.7.2.	Bisześciennne funkcje sklejące	1018
19.7.2.1.	Własności bisześciennnych funkcji sklejących	1018
19.7.2.2.	Bisześciennne interpolacyjne funkcje sklejące	1018
19.7.2.3.	Bisześciennne dopasowujące funkcje sklejące	1020
19.7.3.	Przedstawienie Bernsteina–Béziara dla krzywych i powierzchni	1020
19.7.3.1.	Zasada przedstawienia B–B dla krzywych	1021
19.7.3.2.	Przedstawienie B–B dla powierzchni	1021
19.8.	Wykorzystanie komputerów	1022
19.8.1.	Wewnątrzmaszynowe przedstawienia znaków	1022
19.8.1.1.	Systemy liczbowe	1022
19.8.1.2.	Wewnątrzmaszynowe przedstawienie liczb	1024
19.8.2.	Problemy numeryczne przy obliczeniach na komputerze	1025
19.8.2.1.	Wprowadzenie, rodzaje błędów	1025
19.8.2.2.	Znormalizowane liczby dziesiętne i zaokrąglanie	1026
19.8.2.3.	Kwestia dokładności w rachunkach numerycznych	1027
19.8.3.	Biblioteki metod numerycznych	1031
19.8.3.1.	Biblioteka NAG	1032
19.8.3.2.	Biblioteka IMSL	1032
19.8.3.3.	Biblioteka akwizgrańska	1033

19.8.4.	Zastosowanie specjalistycznych programów obliczeniowych	1033
19.8.4.1.	Mathematica	1033
19.8.4.2.	Maple	1037
20.	PAKIETY OPROGRAMOWANIA MATEMATYCZNEGO	1041
20.1.	Wprowadzenie	1041
20.1.1.	Krótką charakterystykę pakietów oprogramowania matematycznego	1041
20.1.2.	Przykłady wprowadzające do głównych obszarów zastosowań	1042
20.1.2.1.	Manipulowanie wzorami	1042
20.1.2.2.	Obliczenia numeryczne	1043
20.1.2.3.	Przedstawienia graficzne	1043
20.1.2.4.	Programowanie w pakietach obliczeniowych	1043
20.1.3.	Struktura programów i obchodzenie się z pakietami obliczeniowymi	1044
20.1.3.1.	Główne elementy strukturalne	1044
20.2.	Mathematica	1045
20.2.1.	Podstawowe elementy strukturalne	1045
20.2.2.	Rodzaje liczb w programie Mathematica	1046
20.2.2.1.	Podstawowe typy liczb	1046
20.2.2.2.	Liczby specjalne, stałe	1047
20.2.2.3.	Przedstawienia liczb, konwersja	1047
20.2.3.	Ważne operatory	1048
20.2.4.	Listy	1049
20.2.4.1.	Pojęcie i znaczenie	1049
20.2.4.2.	Listy zagnieżdżone (pakietowe)	1050
20.2.4.3.	Działania na listach	1050
20.2.4.4.	Specjalne listy	1050
20.2.5.	Wektory i macierze jako listy	1051
20.2.5.1.	Tworzenie odpowiednich list	1051
20.2.5.2.	Działania na macierzach i wektorach	1051
20.2.6.	Funkcje	1053
20.2.6.1.	Standardowe funkcje matematyczne	1053
20.2.6.2.	Funkcje specjalne	1053
20.2.6.3.	Funkcje czyste	1053
20.2.7.	Wzorce	1054
20.2.8.	Operatory funkcyjne	1054
20.2.9.	Programowanie	1056
20.2.10.	Uzupełnienia dotyczące składni, pomocy, komunikatów	1057
20.2.10.1.	Środowiska, atrybuty	1057
20.2.10.2.	Pomoc, informacja o obiektach	1057
20.2.10.3.	Komunikaty	1057
20.3.	Maple	1058
20.3.1.	Podstawowe elementy strukturalne	1058
20.3.1.1.	Typy i obiekty	1058
20.3.1.2.	Polecenia (wejścia) i odpowiedzi (wyjścia)	1059
20.3.2.	Rodzaje liczb w programie Maple	1060
20.3.2.1.	Podstawowe typy liczb	1060
20.3.2.2.	Stale	1061
20.3.2.3.	Przedstawienia i konwersja liczb	1061
20.3.3.	Ważne operatory w programie Maple	1062
20.3.4.	Wyrażenia algebraiczne	1062

20.3.5. Ciągi i listy	1063
20.3.6. Struktury tabelowe i polowe, wektory i macierze	1064
20.3.6.1. Tabele i pola	1064
20.3.6.2. Pola jednowymiarowe	1065
20.3.6.3. Pola dwuwymiarowe	1065
20.3.6.4. Specjalne instrukcje odnoszące się do wektorów i macierzy	1066
20.3.7. Funkcje i operatory	1066
20.3.7.1. Funkcje	1066
20.3.7.2. Operatory	1067
20.3.7.3. Operatory różniczkowania	1068
20.3.7.4. Operator funkcyjny map	1068
20.3.8. Programowanie w Maple	1068
20.3.9. Uzupełnienia dotyczące składni, informacji i pomocy	1069
20.3.9.1. Użycie biblioteki Maple	1069
20.3.9.2. Zmienne środowiskowe	1070
20.3.9.3. Informacja i pomoc	1070
20.4. Zastosowania programów obliczeniowych	1070
20.4.1. Manipulowanie wyrażeniami algebraicznymi	1070
20.4.1.1. Mathematica	1070
20.4.1.2. Maple	1073
20.4.2. Rozwiązanie równań i układów równań	1076
20.4.2.1. Mathematica	1076
20.4.2.2. Maple	1078
20.4.3. Elementy algebry liniowej	1080
20.4.3.1. Mathematica	1080
20.4.3.2. Maple	1082
20.4.4. Rachunek różniczkowy i całkowy	1085
20.4.4.1. Mathematica	1085
20.4.4.2. Maple	1089
20.5. Grafika w programach matematycznych	1092
20.5.1. Tworzenie grafiki za pomocą programu Mathematica	1092
20.5.1.1. Podstawy tworzenia grafiki	1092
20.5.1.2. Podstawowe elementy graficzne	1093
20.5.1.3. Opcje graficzne	1094
20.5.1.4. Składnia przedstawień graficznych	1094
20.5.1.5. Krzywe dwuwymiarowe	1096
20.5.1.6. Parametryczne przedstawienia krzywych	1097
20.5.1.7. Przedstawienia powierzchni i krzywych przestrzennych	1098
20.5.2. Grafika w Maple	1100
20.5.2.1. Grafika dwuwymiarowa	1100
20.5.2.2. Grafika trójwymiarowa	1103
21. TABELA	1106
21.1. Często używane stałe	1106
21.2. Podstawowe stałe fizyczne	1106
21.3. Ważne rozwinięcia w szereg potęgowy	1109
21.4. Zestawienie niektórych rozkładów w szereg Fouriera	1114
21.5. Całki nieoznaczone	1117

21.5.1. Całki funkcji wymiernych	1117
21.5.1.1. Całki zawierające $X = ax + b$	1117
21.5.1.2. Całki zawierające $X = ax^2 + bx + c$	1119
21.5.1.3. Całki zawierające $X = a^2 \pm x^2$	1121
21.5.1.4. Całki zawierające $X = a^3 \pm x^3$	1122
21.5.1.5. Całki zawierające $X = a^4 + x^4$	1123
21.5.1.6. Całki zawierające $X = a^4 - x^4$	1124
21.5.1.7. Niektóre przypadki rozkładu ułamka na ułamki proste	1124
21.5.2. Całki funkcji niewymiernych	1124
21.5.2.1. Całki zawierające $\sqrt{x}$ i $a^2 \pm b^2x$	1124
21.5.2.2. Inne całki zawierające $\sqrt{x}$	1125
21.5.2.3. Całki zawierające $\sqrt{ax+b}$ i $\sqrt{fx+g}$	1125
21.5.2.4. Całki zawierające $\sqrt{ax+b}$ i $\sqrt{fx+g}$	1127
21.5.2.5. Całki zawierające $\sqrt{a^2 - x^2}$	1128
21.5.2.6. Całki zawierające $\sqrt{x^2 + a^2}$	1129
21.5.2.7. Całki zawierające $\sqrt{x^2 - a^2}$	1131
21.5.2.8. Całki zawierające $\sqrt{ax^2 + bx + c}$	1133
21.5.2.9. Całki zawierające inne wyrażenia niewymierne	1135
21.5.2.10. Wzory rekurencyjne dla całki różniczki dwumiennej	1135
21.5.3. Całki funkcji trygonometrycznych	1135
21.5.3.1. Całki zawierające $\sin ax$	1136
21.5.3.2. Całki zawierające $\cos ax$	1138
21.5.3.3. Całki zawierające $\sin ax$ i $\cos ax$	1141
21.5.3.4. Całki zawierające $\operatorname{tg} ax$	1145
21.5.3.5. Całki zawierające $\operatorname{ctg} ax$	1145
21.5.4. Całki innych funkcji przestępnych	1146
21.5.4.1. Całki funkcji hiperbolicznych	1146
21.5.4.2. Całki funkcji wykładniczych	1147
21.5.4.3. Całki funkcji logarytmicznych	1148
21.5.4.4. Całki funkcji cyklometrycznych	1150
21.5.4.5. Całki odwrotnych funkcji hiperbolicznych	1151
21.6. Całki oznaczone	1152
21.6.1. Całki oznaczone funkcji trygonometrycznych	1152
21.6.2. Całki oznaczone funkcji wykładniczych	1154
21.6.3. Całki oznaczone funkcji algebraicznych	1155
21.7. Całki eliptyczne	1157
21.7.1. Całki eliptyczne pierwszego rodzaju	1157
21.7.2. Całki eliptyczne drugiego rodzaju	1157
21.7.3. Całki eliptyczne zupełne K i E	1158
21.8. Funkcja gamma	1159
21.9. Funkcje Bessela (funkcje walcowe)	1160
21.10. Wielomiany Legendre'a pierwszego rodzaju (funkcje kuliste)	1162
21.11. Transformacje Laplace'a	1163
21.12. Transformacje Fouriera	1168
21.12.1. Transformacje cosinus Fouriera	1168
21.12.2. Transformacje sinus Fouriera	1174
21.12.3. Transformacje Fouriera	1179
21.12.4. Wykładnicze transformacje Fouriera	1181

21.13. Transformacje Z	1182
21.14. Rozkład Poissona	1184
21.15. Standardowy rozkład normalny	1186
21.15.1. Standardowy rozkład normalny dla $0,00 \leq x \leq 1,99$	1186
21.16. Rozkład χ^2	1188
21.17. Rozkład F-Fishera	1189
21.18. Rozkład t-Studenta	1191
21.19. Liczby przypadkowe	1192

22. LITERATURA

Skorowidz

22. LITERATURA	1193
Skorowidz	1210
21.1.1. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.2. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.3. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.4. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.5. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.6. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.7. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.8. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.9. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.10. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.11. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.12. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.13. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.14. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.15. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.16. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.17. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.18. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.19. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.20. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.21. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.22. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.23. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.24. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.25. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.26. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.27. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.28. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.29. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.30. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.31. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.32. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.33. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.34. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.35. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.36. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.37. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.38. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.39. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.40. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.41. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.42. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.43. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.44. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.45. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.46. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.47. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.48. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.49. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.50. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.51. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.52. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.53. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.54. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.55. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.56. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.57. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.58. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.59. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.60. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.61. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.62. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.63. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.64. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.65. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.66. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.67. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.68. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.69. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.70. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.71. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.72. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.73. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.74. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.75. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.76. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.77. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.78. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.79. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.80. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.81. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.82. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.83. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.84. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.85. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.86. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.87. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.88. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.89. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.90. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.91. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.92. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.93. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.94. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.95. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.96. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.97. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.98. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.99. Ciąg funkcyjny	1193
21.1.100. Ciąg funkcyjny	1193