

SPIS RZECZY

ROZDZIAŁ I.

O zmiennych rzeczywistych.

§ §		Str.
1.	Liczby wymierne	1
2.	Przedstawianie liczb wymiernych zapomocą punktów na prostej	1
3—7.	Liczby niewymierne	3
8.	Liczby rzeczywiste	14
9.	O równości i nierówności liczb rzeczywistych	16
10—11.	Działania arytmetyczne na liczbach rzeczywistych	18
12.	O liczbie $\sqrt{2}$	20
13.	Pierwiastki kwadratowe	21
14.	Kilka twierdzeń o niewymiernościach kwadratowych	23
15.	Continuum	25
16.	O zmiennej rzeczywistej ciągłej	28
17.	Przekroje w dziedzinie liczb rzeczywistych	29
18.	O punktach skupienia	32
19.	Twierdzenie Weierstrassa	33
	Zadania	34

Ułamki dziesiętne, 1. Twierdzenie Gaussa, 6. Wykreślnie rozwiązanie równania kwadrat., 21. Ważne nierówności, 35. Średnia arytmetyczna i geometryczna, 35. Nierówność Schwarza, 36. Niewymierności sześciennne, 38: Liczby algebraiczne, 40.

ROZDZIAŁ II.

O funkcjach zmiennej rzeczywistej.

20.	O pojęciu funkcji	42
21.	Wykreślnie przedstawienie funkcji	45
22.	O współrzędnych biegunowych	48
23.	Dalsze przykłady funkcji oraz ich wykresów. Wielomiany	49
24—25.	Funkcje wymierne	52
26.	Funkcje algebraiczne wyraźne	56
27.	Funkcje algebraiczne uwikłane	57
28.	Funkcje przestępne. Funkcje trygonometryczne oraz ich funkcje odwrotne, czyli funkcje kołowe	59

§ §		Str.
29.	Inne klasy funkcji przestępnych	61
30.	Wykreślne rozwiązywanie równań z jedną niewiadomą	65
31.	O funkcjach dwóch zmiennych i o ich wykresach	66
32.	O krzywych płaskich	67
33.	O miejscach geometrycznych w przestrzeni	69
	Zadania	74

Funkcje trygonometryczne, 59. Funkcje arytmetyczne, 62. Walce, 70. Mapy warstwiczne, 71. Stółki, 72. Powierzchnie obrotowe, 73. Powierzchnie linjowe, 73. Konstrukcja geom. liczb niewymiernych, 76. Kwadratura koła, 77.

ROZDZIAŁ III.

O liczbach zespolonych.

34.	O przesunięciach wzdłuż prostej i na płaszczyźnie	79
35.	Równoważność przesunięć. Mnożenie przesunięć przez liczby	81
36.	Dodawanie przesunięć	82
37—38.	Mnożenie przesunięć	86
39—40.	Liczby zespolone	89
41.	O równaniu $i^2 = -1$	92
42.	Interpretacja geometryczna mnożenia przez i	92
43.	O równaniach $x^2 + 1 = 0$, $ax^2 + 2bx + c = 0$	93
44.	Diagram Arganda	96
45—46.	Twierdzenie De Moivre'a	98
47—48.	Wzory na $\sin n\theta$ i $\cos n\theta$	113
49.	Pierwiastkowanie liczb zespolonych	117
50.	Rozwiązanie równania $z^n = a$	117
51.	Ogólna postać twierdzenia De Moivre'a	120
	Zadania	120

Własności trójkąta, 102, 120. Równania o współczynnikach zespolonych, 104. Koło spółosiowe, 106. Przekształcenie dwulinjowe i inne, 107, 112, 124. Stosunek anharmoniczny, 110. Warunek, aby cztery punkty leżały na jednym okręgu, 111. Funkcje zespolone zmiennej rzeczywistej, 112. Konstrukcje euklidesowe wielokątów foremnych, 120. Punkty i proste urojone, 122.

ROZDZIAŁ IV.

O granicach funkcji zmiennej całkowitej dodatniej.

52.	Funkcje zmiennej całkowitej dodatniej	126
53.	Interpolacja	127
54.	Klasy skończone i nieskończone	129
55—56.	O własnościach funkcji zmiennej n , odpowiadających dużym wartościom na n	130

§§		Str.
57.	Zdanie: „ n dąży do nieskończoności”	132
58—59.	O zachowaniu się funkcji n , gdy n dąży do nieskończoności	134
60—62.	Określenie granicy	137
63.	Kilka uwag, dotyczących pojęcia granicy	139
64.	Funkcje wahające się (oscylujące)	143
65.	Niektóre twierdzenia ogólne, dotyczące granic. A. Zachowanie się sumy dwóch funkcji, których zachowanie się jest znane	148
66.	Wnioski z Twierdzenia I	150
67.	B. Zachowanie się iloczynu dwóch funkcji, których zachowanie się jest znane	151
68—70.	C. Zachowanie się ilorazu dwóch funkcji, których zachowanie się jest znane	153
71—72.	O funkcjach stale rosnących wraz z n	155
73.	Inny dowód twierdzenia Weierstrassa	158
74.	Granica funkcji x^n , gdy n dąży do ∞	159
75.	Granica funkcji $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	161
76.	Kilka twierdzeń pomocniczych z algebry	162
77.	Granica funkcji $n(\sqrt[n]{x} - 1)$	164
78.	Szeregi nieskończone	165
79.	Ogólne twierdzenia, dotyczące szeregów nieskończonych	167
80.	Szereg geometryczny nieskończony	169
81.	O przedstawieniu funkcji zmiennej ciągłej rzeczywistej za pomocą granic	171
82.	O kresach zbioru	176
83.	Wyższy i niższy kres funkcji	176
84.	Wyższa i niższa granica funkcji	177
85.	Ogólne kryterjum zbieżności w zastosowaniu do funkcji ograniczonej	179
86.	O funkcjach nieograniczonych	179
87—88.	O granicach funkcji zespolonych i o szeregach, utworzonych z wyrazów zespolonych	180
89.	Granica funkcji z^n , gdy $n \rightarrow \infty$ i gdy z jest dowolną liczbą zespoloną	183
90.	Szereg geometryczny $1 + z + z^2 + \dots$	184
	Zadania	185.

Oscylacje $\sin n\theta\pi$, 143. Granice funkcji

$$n^k x^n, \frac{n}{x}, \frac{n}{n}, \frac{n}{(n!)} \cdot \frac{x^n}{n!} \left(\frac{m}{n}\right) x^n, 160, 164.$$

Ułamki dziesiętne i okresowe, 170. Postęp arytmetyczny, 172. Postęp harmoniczny, 174. Pównanie $x_{n+1} = f(x_n)$, 186. Rozwijanie funkcji wymiernych, 187. Granica wartości średniej, 188.

ROZDZIAŁ V.

O granicach funkcji zmiennej ciągłej. O funkcjach ciągłych i nieciągłych.

§ §		Str.
91.	O granicy funkcji $\varphi(x)$, gdy $x \rightarrow \infty$	190
92.	Granica funkcji, gdy $x \rightarrow -\infty$	193
93.	Twierdzenia, odpowiadające twierdzeniom §§ 65—69	193
94.	O funkcjach stale rosnących lub stale malejących	193
95.	Granica funkcji, gdy x dąży do zera	193
96.	Granica funkcji, gdy x dąży do a	195
97.	Funkcje stale rosnące lub stale malejące	196
98—99.	Wyższa i niższa granica oraz kryterjum zbieżności	196
100—101.	Funkcje ciągłe zmiennej rzeczywistej	202
102—103.	O zasadniczej własności funkcji ciągłych	207
104.	Obszar zmienności funkcji ciągłej	211
105.	O wahanii się funkcji w przedziale	213
106.	Inny dowód twierdzenia 2 § 104	214
107—108.	O zbiorach przedziałów na prostej. Twierdzenie Heinego-Borela	214
109.	O funkcjach ciągłych kilku zmiennych	220
110.	O funkcjach uwikłanych	221
111.	O funkcjach odwrotnych	223
	Zadania	225

Ciągłość i granice wielomianów i funkcji wymiernych.

197, 205. Granica funkcji $\frac{x^m - a^m}{x - a}$, 199. Rzędy wielkości

i małości. 200. Granica funkcji $\frac{\sin x}{x}$, 201. Nieskończoność funkcji, 205. Ciągłość funkcji. 205. Ciągłość funkcji $\sin x$, $\cos x$, 205. Klasyfikacja nieciągłości, 206.

ROZDZIAŁ VI.

O pochodnych i całkach.

112.	O pochodnych	228
113—114.	Kilka uwag ogólnych	230
115.	Kilka reguł różniczkowania	234
116.	O pochodnych funkcji zespolonych	236
117.	Znakowanie rachunku różniczkowego	237
118.	A. Pochodne wielomianów	239
119.	B. Pochodne funkcji wymiernych	241
120.	C. Pochodne funkcji algebraicznych	243
121.	D. Pochodne funkcji przestępnych	244
122.	Różniczkowanie wielokrotne	247
123.	Kilka twierdzeń ogólnych, dotyczących pochodnych	250

§ §	Str.
124—126. Maximum i minimum	252
127—128. Twierdzenie o wartości pośredniej	260
129. O całkowaniu	262
130. Zagadnienie praktyczne całkowania	264
131. Całkowanie wielomianów	266
132. Całkowanie funkcji wymiernych	267
133. Uwaga, dotycząca całkowania funkcji wymiernych	270
134. Całkowanie funkcji algebraicznych	270
135. Całkowanie przez podstawienie i przez usunięcie niewymierności	271
136. Całki, związane z teorią stożkowych	272
137. Całka $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$	272
138. Całka $\int \frac{\lambda x + \mu}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} dx$	273
139. Całka $\int (\lambda x + \mu) \sqrt{ax^2+2bx+c} dx$	274
140. Całkowanie przez części	274
141. Całka $\int R(x, y) dx$, gdzie $y^2 = ax^2 + 2bx + c$	277
142. Całkowanie funkcji przestępnych	280
143. Wielomiany, utworzone z wstaw i dostaw wielokrotności argumentu x	280
144. Całki $\int x^n \cos x dx$, $\int x^n \sin x dx$	281
145. Funkcje wymierne wstaw i dostaw zmiennej x	282
146. Całki, zawierające funkcję $\arcsin x$, $\arctg x$, $\lg x$	283
147. O polach krzywych płaskich	284
148. O długości krzywych płaskich	285
Zadania	289

Pochodna funkcji x^m , 232. Pochodne $\sin x$, $\cos x$, 232. Styczna i normalna do krzywej, 232, 247. Pierwiastki wielokrotne równania 240, 291. Twierdzenie Rolle'a dla wielomianów, 241. Twierdzenie Leibniza, 247. Maxima i minima ilorazu dwóch funkcji kwadratowych, 257, 291. Osie stożkowej, 260. Długości i pola we współrzędnych biegunowych, 288. Różniczkowanie wyznacznika, 289. Uogólnienie twierdzenia o wartości pośredniej, 293. Wzory redukcyjne, 295.

ROZDZIAŁ VII.

Dalsze twierdzenia z rachunku różniczkowego i całkowego.

§ §		Str.
149.	Ogólniejsze twierdzenie o wartości pośredniej	299
150.	Szereg Taylora	304
151.	Zastosowania twierdzenia Taylora. A. Maxima i minima	305
152.	B. Obliczanie niektórych granic	306
153.	C. Styczna do krzywych płaskich	309
154.	Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych	312
155.	Różniczkowanie funkcji dwóch funkcji	315
156.	Twierdzenie o wartości pośredniej w zastosowaniu do funk- cji dwóch zmiennych	317
157.	O różniczkach	319
158.	Całka określona i pole	323
159.	Całka określona	326
160.	Pole wycinka kołowego. Funkcje kołowe	327
161.	Obliczanie całek określonych jako granic sum	331
162.	Ogólne własności całek określonych	332
163.	Całkowanie przez części i zapomocą podstawień	336
164.	Dowód twierdzenia Taylora, oparty na całkowaniu przez części	340
165.	Zastosowanie wzoru Cauchy'ego do szeregu dwumianowego	341
166.	Całki funkcji zespolonych zmiennej rzeczywistej	342
	Zadania	343

Metoda Newtona przybliżon. rozwiązywania równań, 302. Rozwinięcia $\sin x$, $\cos x$ na szereg, 304. Szereg dwumiano-
wy, 305. Styczna do krzywej, 310, 322, 346. Punkt przegię-
cia, 310. Krzywizna, 311, 345. Stożkowe ściśle styczne,
312, 346. Różniczkowanie funkcji uwikłanej, 322. Całki
Fouriera, 330, 335. Drugie twierdzenie o wartości pośred-
niej, 338. Funkcje jednorodne, 346. Twierdzenie Eulera, 346.
Jacobiany, 346. Nierówność Schwarza dla całek, 350.
Wartości przybliżone całek określonych, 351. Reguła
Simpsona, 351.

ROZDZIAŁ VIII.

**O zbieżności szeregów nieskończonych i całek
nieskończonych.**

167—169.	Szeregi o wyrazach dodatnich	353
170.	Proste zastosowanie powyższych cech zbieżności. Cechy zbież- ności Cauchy'ego i d'Alembert'a	354
171.	Twierdzenie Dirichleta	358
172.	Mnożenie szeregów o wyrazach dodatnich	358

§§	Str.
173—174. Inne cechy zbieżności szeregów	360
175. Twierdzenie Abela	361
176. Cecha zbieżności Maclaurina i Cauchy'ego	363
177. Szereg Σn^{-s}	364
178. Cecha zagęszczenia	366
179. Całki nieskończone	367
180. Przypadek, gdy $\varphi(x)$ jest dodatnie	369
181. Reguły podstawienia i całkowania przez części w zastosowaniu do całek nieskończonych	372
182—184. Inne typy całek nieskończonych	376
185. Szeregi o wyrazach dodatnich i ujemnych	385
186. Szeregi bezwzględnie zbieżne	386
187. Twierdzenie Dirichleta w zastosowaniu do szeregów bezwzględnie zbieżnych	388
188. Szeregi warunkowo zbieżne	388
189. Cechy zbieżności szeregów warunkowo zbieżnych	389
190. Szeregi przemienne	390
191. Cechy zbieżności Dirichleta i Abela	392
192. Szeregi wyrazów zespolonych	394
193—194. Szeregi potęgowe	395
195. Obszar zbieżności szeregu potęgowego. Koło zbieżności	396
196. Jednoznaczność rozwinięcia na szereg potęgowy	399
197. Mnożenie szeregów	399
Zadania	401

Szeregi Σn^{kr^n} i pokrewne, 356. Przekształcanie całek nieskończonych przez podstawienia oraz całkowanie przez części 3 4, 375, 382. Szeregi $\Sigma a_n \cos n\theta$, $\Sigma a_n \sin n\theta$, 387, 394. Zmiana sumy szeregu przez przestawienie wyrazów, 391. Szereg logarytmiczny 398. Szereg dwumianowy 399, 401. Mnożenie szeregów warunkowo zbieżnych, 401, 406. Szeregi zwrotne, 403. Równania różnicowe, 404. Całki określone, 406. Nierówność Schwarz'a dla całek nieskończonych, 408.

ROZDZIAŁ IX.

O funkcjach logarytmicznych i wykładniczych zmiennej rzeczywistej.

198—199. Określenie funkcji logarytmicznej	409
200. Funkcyjne równanie, któremu czyni zadość funkcja $\lg x$	412
201. Sposób, w jaki $\lg x$ dąży do nieskończoności, gdy $x \rightarrow \infty$	412
202. Dowód twierdzenia, że $(\lg x)/x^\alpha \rightarrow 0$, gdy $x \rightarrow \infty$	413
203. Zachowanie się funkcji $\lg x$, gdy $x \rightarrow +0$	414
204. Skale nieskończoności. Skala logarytmiczna	414
205. O liczbie e	416

§ §		Str.
206.	O funkcji wykładniczej	417
207—208.	Najważniejsze własności funkcji wykładniczej	418
209.	O funkcji a^x	419
210.	Liczba e^x jako granica	421
211.	Funkcja $\lg x$ jako granica	422
212.	Logarytmy dziesiętne	423
213.	Cechy logarytmiczne zbieżności szeregów i całek	428
214.	Rozwinięcie funkcji e^x na szereg	432
215.	Szereg logarytmiczny	435
216.	Rozwinięcie $\arctg x$ na szereg	437
217.	Szereg dwumianowy	440
218.	Inny sposób uzasadnienia teorii funkcji wykładniczej i logarytmicznej	442
219—221.	Teoria analityczna funkcji kołowych	443
	Zadania	449

Całki, zawierające funkcję wykładniczą, 424. Funkcje hiperboliczne, 425. Całki pewnych funkcji algebraicznych, 427. Stała Eulera, 431. Niewymierność liczby e , 434. Obliczanie przybliżonych wartości pierwiastków zapomocą szeregu dwumianowego, 440. Niewymierność liczby $\lg_{10} n$, 450. Całki określone 456, 457.

ROZDZIAŁ X.

Ogólna teoria funkcji logarytmicznej i wykładniczej, oraz funkcji kołowych.

222—223.	O funkcjach zmiennej zespolonej	459
224.	Całki krzywolinijne rzeczywiste i zespolone	460
225.	Określenie funkcji $\text{Log } \zeta$	461
226.	O wartościach funkcji $\text{Log } \zeta$	463
227.	Funkcja wykładnicza	467
228.	Wartość funkcji $\exp \zeta$	468
229.	Równanie funkcyjne, któremu czyni zadość $\exp \zeta$	469
230.	O funkcji a^z	469
231.	Ogólna wartość funkcji a^z	471
232.	Związki między funkcją wykładniczą, a funkcjami trygonometrycznymi	474
233.	Określenie funkcji $\sin \zeta$, $\cos \zeta$ dla dowolnych wartości ζ	474
234.	Funkcje hiperboliczne ogólne	475
235.	Wzory na $\cos (\xi + i\eta)$, $\sin (\xi + i\eta)$	476
236.	Związek między funkcjami logarytmicznymi, a kołowymi	479
237.	Rozwinięcie $\exp z$ na szereg potęgowy	480
238.	Rozwinięcie $\cos z$ oraz $\sin z$ na szeregi potęgowe	482
239—240.	Szereg logarytmiczny	484

§ §		Str.
241.	Kilka zastosowań szeregu logarytmicznego	488
242.	Ogólna postać szeregu dwumianowego	489
	Zadania	492

Równanie funkcyjne, któremu czyni zadość $\text{Log } z$, 466.
 Funkcja e^z , 472. Logarytm przy dowolnej zasadzie, 473.
 Funkcje $\text{arc sin } z$, $\text{arc cos } z$, $\text{arc tg } z$, 477. Szeregi trygonometryczne, 483, 487. Pierwiastki równań przestępnych, 493.
 Przekształcenia, 494, 496. Rzut stereograficzny, 495. Rzut Mercatora, 496. Warstwie, 497. Całki określone, 500.

DODATEK I.	Dowód twierdzenia, że każde równanie posiada pierwiastek	501
DODATEK II.	O symbolach O , o , $\sim$	508
DODATEK III.	Uwaga o zagadnieniach, dotyczących granic podwójnych	516
DODATEK IV.	O pojęciu nieskończoności w analizie i w geometrii .	519