

# SPIS TREŚCI

Przedmowa . . . . .	XI
Literatura uzupełniająca . . . . .	XI
<b>ROZDZIAŁ 1. KONSTRUKCJE TEORIOGRUPOWE</b> . . . . .	<b>1</b>
§1. Grupy klasyczne małych wymiarów . . . . .	1
1. Ogólne definicje . . . . .	1
2. Parametryzacja grup SU(2) i SO(3) . . . . .	2
3. Epimorfizm SU(2) → SO(3) . . . . .	3
4. Geometryczne przedstawienie grupy SO(3) . . . . .	5
5. Kwaterniony . . . . .	6
Ćwiczenia . . . . .	9
§2. Warstwy względem podgrupy . . . . .	11
1. Własności elementarne . . . . .	11
2. Struktura grup cyklicznych . . . . .	13
Ćwiczenia . . . . .	14
§3. Działanie grup na zbiorach . . . . .	15
1. Homomorfizmy $G \rightarrow S(\Omega)$ . . . . .	15
2. Orbity i podgrupy stacjonarne punktów . . . . .	16
3. Przykłady działań grup . . . . .	17
4. Przestrzenie jednorodne . . . . .	21
Ćwiczenia . . . . .	22
§4. Grupy ilorazowe i homomorfizmy . . . . .	24
1. Grupa ilorazowa . . . . .	24
2. Twierdzenia o homomorfizmach grup . . . . .	25
3. Komutant . . . . .	29
4. Iloczyn grupy . . . . .	31
5. Generatory i relacje . . . . .	33
Ćwiczenia . . . . .	38

<b>ROZDZIAŁ 2. STRUKTURA GRUP</b> . . . . .	41
<b>§1. Grupy rozwiązalne i proste</b> . . . . .	41
1. Grupy rozwiązalne . . . . .	41
2. Grupy proste . . . . .	43
Ćwiczenia . . . . .	47
<b>§2. Twierdzenia Sylowa</b> . . . . .	47
Ćwiczenia . . . . .	53
<b>§3. Skończenie generowane grupy abelowe</b> . . . . .	53
1. Przykłady i rezultaty wstępne . . . . .	53
2. Grupy abelowe beztorsyjne . . . . .	55
3. Skończenie generowane grupy abelowe wolne . . . . .	58
4. Struktura skończenie generowanych grup abelowych . . . . .	59
5. Inne podejścia do zagadnienia klasyfikacji . . . . .	60
6. Podstawowe twierdzenie o skończonych grupach abelowych . . . . .	64
Ćwiczenia . . . . .	67
<b>§4. Liniowe grupy Liego</b> . . . . .	68
1. Definicje i przykłady . . . . .	68
2. Krzywe w grupach macierzowych . . . . .	70
3. Różniczka homomorfizmu . . . . .	73
4. Algebra Liego grupy Liego . . . . .	74
5. Logarytm . . . . .	76
Ćwiczenia . . . . .	77
<b>ROZDZIAŁ 3. ELEMENTY TEORII REPREZENTACJI GRUP</b> . . . . .	78
<b>§1. Definicje i przykłady reprezentacji liniowych</b> . . . . .	81
1. Pojęcia podstawowe . . . . .	81
2. Przykłady reprezentacji liniowych . . . . .	86
Ćwiczenia . . . . .	91
<b>§2. Unitarność i przywiedność</b> . . . . .	91
1. Reprezentacje unitarne . . . . .	91
2. Całkowita przywiedność . . . . .	95
Ćwiczenia . . . . .	97
<b>§3. Skończone grupy obrotów</b> . . . . .	98
1. Rzędy skończonych podgrup w $SO(3)$ . . . . .	99
2. Grupy obrotów wielościanów foremnych . . . . .	101
Ćwiczenia . . . . .	104
<b>§4. Charaktery reprezentacji liniowych</b> . . . . .	105
1. Lemat Schura i wnioski . . . . .	105
2. Charaktery reprezentacji . . . . .	107
Ćwiczenia . . . . .	113

<b>§5. Reprezentacje nieprzywiedlne grup skończonych</b>	113
1. Liczba reprezentacji nieprzywiedlnych	113
2. Wymiary reprezentacji nieprzywiedlnych	115
3. Reprezentacje grup abelowych	117
4. Reprezentacje niektórych specjalnych grup	119
Ćwiczenia	122
<b>§6. Reprezentacje grup <math>SU(2)</math> i <math>SO(3)</math></b>	125
Ćwiczenia	128
<b>§7. Iloczyn tensorowe reprezentacji</b>	128
1. Reprezentacja kontragredientna	128
2. Iloczyn tensorowy reprezentacji	129
3. Pierścień charakterów	130
4. Niezmienniki grup liniowych	133
Ćwiczenia	137
<b>ROZDZIAŁ 4. PIERŚCIENIE, ALGEBRY, MODUŁY</b>	139
<b>§1. Pewne konstrukcje w teorii pierścieni</b>	139
1. Ideały i pierścienie ilorazowe	139
2. Ciało rozkładu wielomianu	141
3. Twierdzenia o izomorfizmie dla pierścieni	145
Ćwiczenia	147
<b>§2. Wybrane twierdzenia o pierścieniach</b>	148
1. Liczby całkowite Gaussa	148
2. Rozkład na sumę dwóch kwadratów	149
3. Rozszerzenia wielomianowe dziedzin z jednoznacznością rozkładu	151
4. Struktura grupy multiplikatywnej $U(\mathbb{Z}_n)$	153
Ćwiczenia	156
<b>§3. Moduły</b>	157
1. Wstępne informacje o modułach	157
2. Moduły wolne	162
3. Elementy całkowite pierścienia	165
Ćwiczenia	166
<b>§4. Algebra nad ciałem</b>	167
1. Definicje i przykłady algebr	167
2. Algebra z dzieleniem	170
3. Algebra grupowe i moduły nad nimi	174
Ćwiczenia	183
<b>§5. Moduły nieprzywiedlne nad algebrą Liego <math>\mathfrak{sl}(2)</math></b>	185
1. Informacje wstępne	185
2. Wagi i krotności	187
3. Wektor najwyższej wagi	187
4. Twierdzenie klasyfikujące	189
Ćwiczenia	190

<b>ROZDZIAŁ 5. WSTĘP DO TEORII GALOIS</b> . . . . .	191
<b>§1. Skończone rozszerzenia ciał</b> . . . . .	191
1. Elementy algebraiczne i stopnie rozszerzeń . . . . .	191
2. Izomorfizm ciał rozkładu . . . . .	196
3. Istnienie elementu pierwotnego . . . . .	198
Ćwiczenia . . . . .	200
<b>§2. Ciała skończone</b> . . . . .	200
1. Istnienie i jednoznaczność . . . . .	200
2. Podciała i automorfizmy ciał skończonych . . . . .	202
3. Wzór Möbiusa na odwrócenie i jego zastosowania . . . . .	204
Ćwiczenia . . . . .	208
<b>§3. Odpowiedniość Galois</b> . . . . .	210
1. Rezultaty wstępne . . . . .	210
2. Zasadnicze twierdzenie teorii Galois . . . . .	213
3. Ilustracja zasadniczego twierdzenia . . . . .	214
Ćwiczenia . . . . .	218
<b>§4. Znajdowanie grupy Galois</b> . . . . .	219
1. Działanie grupy $\text{Gal}(f)$ na pierwiastkach wielomianu $f$ . . . . .	219
2. Wielomiany, których stopień jest liczbą pierwszą . . . . .	221
3. Redukcja modulo $p$ . . . . .	224
4. Bazy normalne . . . . .	229
Ćwiczenia . . . . .	232
<b>§5. Zagadnienia związane z rozszerzeniami Galois</b> . . . . .	233
1. Liczby pierwsze w ciągach arytmetycznych . . . . .	233
2. Rozszerzenia abelowe . . . . .	234
3. Norma i ślad . . . . .	235
4. Rozszerzenia cykliczne . . . . .	238
5. Kryterium rozwiązalności równań przez pierwiastniki . . . . .	240
Ćwiczenia . . . . .	243
<b>§6. Sztywność i wymierność w grupach skończonych</b> . . . . .	244
1. Definicje i sformułowanie podstawowego twierdzenia . . . . .	244
2. Liczenie rozwiązań . . . . .	246
3. Przykłady sztywności . . . . .	249
Ćwiczenia . . . . .	250
<b>§7. Epilog</b> . . . . .	251
<b>DODATEK. PROBLEMY NIEROZWIĄZANE</b> . . . . .	253
1. Klasyfikacja skończonych grup prostych . . . . .	253
2. Automorfizmy regularne . . . . .	254
3. Dziwna algebra Liego . . . . .	254
4. Problem Burnside'a . . . . .	254
5. Skończone grupy automorfizmów wielomianowych . . . . .	255

jak tylko teorie niezmienników specjalnych grup.

6. SR-grupy . . . . .	255
7. Odwrotne zagadnienie Galois . . . . .	256
<b>Odpowiedzi i wskazówki do ćwiczeń . . . . .</b>	<b>258</b>
<b>Uwagi metodyczne . . . . .</b>	<b>267</b>
Pytania egzaminacyjne . . . . .	267
Program wykładu algebry . . . . .	269
<b>Skorowidz . . . . .</b>	<b>270</b>

Zawartość trzeciej części podręcznika „Wstęp do algebry” to kontynuacja poprzednich części na wyższym, choć (najmniej nakładzie) nie nadzwyczaj abstrakcyjnym poziomie. Nowym punktem jest tu się znacząco więcej, przynajmniej w pierwszym z czterech rozdziałów. Ciągłość spójności tu nowych znajomości z rozdziału 1 części I i rozdziału 2 części II, którzy wprowadzą go w świat znaczenia bardziej naprosto konkretnego. W szczególności należy poświęcić starannemu przestudiowaniu przykładów, które zajmują ponad jedną czwartą tekstu (naturalne jest na przykład zaliczenie do przykładowego materiału § 1 rozdziału 1 i § 3 rozdziału 3). Ich doświadczenia na celu należy mieć na przeczucie „kłódkę” między algebrą a innymi działami matematyki, które w rezultacie u Czytelnika utrwalił się przekonanie, że matematyka jest jest „całością”, który postawił sobie sobie w trzeciej części książki, będzie można nazwać „zobowiązaniem”.

Należy pamiętać, że „Wstęp do algebry” przeznaczony jest dla szerokiego grona studentów matematyki, a nie tylko przyszłych algebraistów. Dlatego na przykład „Podstawy struktury algebraicznej” należy patrzeć z pewną wyrozumiałością; są to w końcu te same grupy, pierścienie i ciała, rozszerzone pod względem asortymentu (z pewnym odchyleniem w kierunku geometrii), a przede wszystkim — wzbogacone o ważne pojęcie reprezentacji liniowej. To właśnie moduły i reprezentacje liniowe prowadzą do tych realizacji algebr i grup, które stale pojawiają się w analizie i geometrii.

*A. I. Kostrikin*

## LITERATURA UZUPELNIAJĄCA

1. I. P. Adams, *Lectures on Lie Groups*, Benjamin, New York 1969 (angielski przekład 1974).
2. M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading 1969 (angielski przekład 1972).