

WŁODZIMIERZ KRYSICKI, LECH WŁODARSKI

ANALIZA MATEMATYCZNA W ZADANIACH

CZĘŚĆ DRUGA

Wydanie XVI

Pw

WARSZAWA 1987

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS RZECZY

Przedmowa do wydania pierwszego	5
Przedmowa do wydania dziesiątego	6

Rozdział I. Funkcje dwu lub więcej zmiennych

§ 1.1. Przestrzeń euklidesowa	7
§ 1.2. Zbiory w przestrzeni euklidesowej	9
§ 1.3. Zbieżność w przestrzeni euklidesowej	11
§ 1.4. Funkcja, granica funkcji, ciągłość funkcji w przestrzeni euklidesowej	11
§ 1.5. Zbiory płaskie	13
§ 1.6. Zbieżność ciągów w przestrzeni $\mathbb{R}^2$	16
§ 1.7. Funkcje dwóch zmiennych	16
§ 1.8. Granica i ciągłość funkcji dwóch zmiennych	17
§ 1.9. Pochodne cząstkowe	21
§ 1.10. Pochodne jednostronne i pochodne w kierunku osi	28
§ 1.11. Twierdzenie o przyrostach. Różniczka zupełna	31
§ 1.12. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów	36
§ 1.13. Różniczki wyższych rzędów funkcji wielu zmiennych	42
§ 1.14. Operacje dystrybutywne (liniowe) w przestrzeni liniowej i ich zastosowania przy obliczaniu różniczek zupełnych	44
§ 1.15. Wzór Taylora dla funkcji wielu zmiennych	47
§ 1.16. Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych	49
§ 1.17. Ekstrema absolutne funkcji dwóch zmiennych	54

Rozdział II. Funkcje uwikłane

§ 2.1. Funkcje wielowartościowe (wieloznaczne)	59
§ 2.2. Funkcje uwikłane jednej zmiennej	60
§ 2.3. Funkcje uwikłane wielu zmiennych	67
§ 2.4. Ekstrema funkcji uwikłanej jednej lub dwóch zmiennych	71
§ 2.5. Przekształcanie ciągle przestrzeni euklidesowej w siebie. Jakobiany	78
§ 2.6. Układy funkcji uwikłanych	84
§ 2.7. Ekstrema warunkowe	86
§ 2.8. Funkcje jednorodne	90

Rozdział III. Zastosowania geometryczne rachunku różniczkowego do krzywej płaskiej

§ 3.1. Styczna i normalna do krzywej płaskiej	92
§ 3.2. Krzywizna i promień krzywizny	94
§ 3.3. Ewoluta i ewolwenta	98
§ 3.4. Płaszczyzna styczna do powierzchni	103
§ 3.5. Obwiednia rodziny linii	105
§ 3.6. Linie w przestrzeni	106
§ 3.7. Krzywizna i skręcenie krzywej przestrzennej	112

Rozdział IV. Całki podwójne

§ 4.1. Całka podwójna, interpretacja geometryczna	115
§ 4.2. Własności całek podwójnych	116
§ 4.3. Zamiana całki podwójnej na iterowaną	117
§ 4.4. Zamiana zmiennych w całce podwójnej	117
§ 4.5. Całka niewłaściwa $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$	118
§ 4.6. Obliczanie całki podwójnej. Objętość bryły	119
§ 4.7. Pole powierzchni w przestrzeni	131
§ 4.8. Inne zastosowania całek podwójnych	138

Rozdział V. Całki potrójne

§ 5.1. Zbiory punktów w przestrzeni	141
§ 5.2. Całka potrójna	142
§ 5.3. Zamiana całki potrójnej na iterowaną	143
§ 5.4. Zamiana współrzędnych prostokątnych na współrzędne sferyczne i walcowe	144
§ 5.5. Obliczanie całki potrójnej	146
§ 5.6. Całka potrójna w zastosowaniach technicznych	154

Rozdział VI. Całki krzywoliniowe i powierzchniowe

§ 6.1. Łuki i krzywe gładkie	158
§ 6.2. Całka krzywoliniowa płaska skierowana	159
§ 6.3. Całka krzywoliniowa płaska nieskierowana	163
§ 6.4. Całka krzywoliniowa w przestrzeni skierowana	165
§ 6.5. Całka krzywoliniowa w przestrzeni nieskierowana	167
§ 6.6. Wzór Greena	168
§ 6.7. Całka różniczki zupełnej funkcji dwóch zmiennych	170
§ 6.8. Całka różniczki zupełnej funkcji trzech zmiennych	173
§ 6.9. Pola wektorowe	176
§ 6.10. Całka powierzchniowa nieorientowana	184
§ 6.11. Całka powierzchniowa zorientowana	190
§ 6.12. Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego. Twierdzenie Stokesa	193

Rozdział VII. Równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego o rozdzielonych zmiennych

§ 7.1. Uwagi ogólne o równaniach różniczkowych rzędu pierwszego	196
§ 7.2. Uwagi ogólne o rozdzielaniu zmiennych	197
§ 7.3. Przykłady rozwiązywania równań o rozdzielonych zmiennych	198

Rozdział VIII. Niektóre równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego rozwiązywalne metodą podstawienia

§ 8.1. Równania różniczkowe postaci $y' = f(ax + by + c)$	214
§ 8.2. Równania różniczkowe jednorodne względem x i y	218
§ 8.3. Równania różniczkowe typu $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$	223

Rozdział IX. Równania różniczkowe liniowe rzędu pierwszego

§ 9.1. Definicje	227
§ 9.2. Równanie różniczkowe liniowe jednorodne	227
§ 9.3. Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne	229
§ 9.4. Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne (cd.)	238
§ 9.5. Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne (dokończenie)	248

Rozdział X. Rodziny linii

§ 10.1. Równanie różniczkowe rodziny linii	252
§ 10.2. Rodzina linii ortogonalnych.	255

Rozdział XI. Niektóre równania różniczkowe nieliniowe rzędu pierwszego

§ 11.1. Równanie różniczkowe Bernoulliego	261
§ 11.2. Równanie różniczkowe Riccatiego	264
§ 11.3. Równanie różniczkowe Clairauta	266
§ 11.4. Równanie różniczkowe Lagrange'a-d'Alemberta	269
§ 11.5. Równanie różniczkowe zupełne	273
§ 11.6. Czynniki całkujące	275

Rozdział XII. Równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego sprowadzalne do równań rzędu pierwszego

§ 12.1. Równanie różniczkowe typu $F(x, y', y'')=0$	280
§ 12.2. Równanie różniczkowe typu $F(y, y', y'')=0$	283
§ 12.3. Równanie różniczkowe jednorodne względem y, y', y''	285

Rozdział XIII. Równania różniczkowe liniowe o współczynnikach stałych. Równanie Eulera

§ 13.1. Równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego	288
§ 13.2. Równanie różniczkowe liniowe jednorodne	288
§ 13.3. Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne	292
§ 13.4. Równanie różniczkowe Eulera	300
§ 13.5. Równanie różniczkowe liniowe rzędu n	304

Rozdział XIV. Układ dwóch równań różniczkowych rzędu pierwszego

§ 14.1. Uwagi ogólne	309
§ 14.2. Rozwiązywanie układu równań	310

Rozdział XV. Szeregi trygonometryczne

§ 15.1. Uwagi ogólne	314
§ 15.2. Rozwijanie funkcji w szereg Fouriera	318

Rozdział XVI. Funkcje zmiennej zespolonej

§ 16.1. Pojęcie funkcji zmiennej zespolonej	326
§ 16.2. Liczby zespolone jako pary uporządkowane liczb rzeczywistych	328
§ 16.3. Zbiór liczb zespolonych jako przestrzeń metryczna	332
§ 16.4. Ciągi i szeregi liczb zespolonych	333
§ 16.5. Granica funkcji zmiennej zespolonej	335
§ 16.6. Pochodna funkcji zmiennej zespolonej	337

§ 16.7. Ciągi i szeregi funkcyjne	340
§ 16.8. Szeregi potęgowe	342
§ 16.9. Mnożenie szeregów	345
§ 16.10. Funkcje całkowite	348
§ 16.11. Nieskończoność zespolona. Granice niewłaściwe. Rzut stereograficzny	351
§ 16.12. Całka funkcji zespolonej	354
§ 16.13. Funkcje holomorficzne	357
§ 16.14. Szeregi Laurenta. Punkty regularne i osobliwe funkcji zmiennej zespolonej.	361
§ 16.15. Funkcje meromorficzne i reszdu funkcji	366
§ 16.16. Logarytmy i potęgi liczb zespolonych. Gałąź jednoznaczna funkcji logarytmu zmiennej zespolonej	370
§ 16.17. Funkcje zmiennej zespolonej jednokrotne i wielokrotne. Przedłużenia analityczne	372
§ 16.18. Elementy analityczne. Przedłużenia analityczne wzdłuż krzywej. Funkcje analityczne wieloznaczne (wielowartościowe). Powierzchnie Riemanna	374

Rozdział XVII. Transformacja Laplace'a i jej zastosowania

§ 17.1. Całka Laplace'a	378
§ 17.2. Transformacja Laplace'a	379
§ 17.3. Transformacja odwrotna Laplace'a	379
§ 17.4. Liniowość transformacji Laplace'a	381
§ 17.5. Transformata pochodnej	382
§ 17.6. Zastosowanie transformacji Laplace'a do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych i układów równań różniczkowych	383

Rozdział XVIII. Równania różniczkowe cząstkowe

§ 18.1. Definicja ogólna	386
§ 18.2. Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego	386

Rozdział XIX. Rachunek wariacyjny

§ 19.1. Uwagi wstępne	396
§ 19.2. Twierdzenie Eulera	397

Rozdział XX. Rachunek prawdopodobieństwa

§ 20.1. Definicja prawdopodobieństwa	400
§ 20.2. Zdarzenia niezależne. Prawdopodobieństwo koniunkcji (iloczynu) zdarzeń losowych	404
§ 20.3. Twierdzenie o prawdopodobieństwie zupełnym (całkowitym). Wzór Bayesa	410
§ 20.4. Zmienne losowe, ich rozkłady. Dystrybucja	412
§ 20.5. Wartość przeciętna, momenty, wariancje zmiennej losowej	415
§ 20.6. Rozstęp, mediana moda	418
§ 20.7. Twierdzenie Bernoulliego. Rozkład dwumianowy (Bernoulliego)	420
§ 20.8. Twierdzenie i rozkład Poissona	422
§ 20.9. Rozkład normalny	423
§ 20.10. Przybliżenie rozkładu Bernoulliego do rozkładu normalnego	426
§ 20.11. Prawo wielkich liczb Bernoulliego	427

Rozwiązania i odpowiedzi	429
------------------------------------	-----

Skorowidz	481
---------------------	-----