

Wstęp	13
§ 1. Podstawowe pojęcia mnogościowe	13
1. Zbiory	13
2. Działania na zbiorach	14
3. Produkty kartezjańskie	15
4. Relacje równoważności. Podział na klasy	15
5. Funkcje	16
6. Zbiory przeliczalne	20
§ 2. Liczby rzeczywiste	22
1. Zbiór \mathbf{R} liczb rzeczywistych jako ciało	22
2. Relacja mniejszości. Zasada ciągłości	23
3. Przedziały. Wartość bezwzględna	25
4. Przykłady zastosowania zasady ciągłości	25
5. Funkcje o wartościach rzeczywistych	27
§ 3. Liczby zespolone	28
1. Ciało \mathbf{C} liczb zespolonych	28
2. Geometryczna interpretacja liczb zespolonych. Moduł i argument liczby	29
3. Funkcje o wartościach zespolonych	30
Rozdział I. Elementy topologii	31
§ 4. Przestrzeń metryczna	31
1. Definicja	31
2. Średnica zbioru. Zbiory ograniczone	31
3. Granica ciągu punktów	32
§ 5. Granica ciągu liczbowego	34
1. Własności granicy ciągu liczbowego	34
2. Granica ciągu liczb rzeczywistych	36
3. Przykłady	39
4. Liczba e	41
§ 6. Rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych \mathbf{R}	43
1. Definicje	43
2. Granice ekstremalne ciągu	44
3. Granica ciągu	46
4. Funkcje o wartościach w \mathbf{R}	48
§ 7. Przestrzeń metryczna zupełna	49
1. Definicja. Zupełność przestrzeni \mathbf{R}	49
2. Twierdzenie o punkcie stałym	50
§ 8. Produkt kartezjański przestrzeni metrycznych	52
1. Metryka i zbieżność w produkcie	52
2. Produkt przestrzeni zupełnych	54
§ 9. Granica funkcji	55
1. Granica funkcji w punkcie	55
2. Granica funkcji o wartościach liczbowych	56
3. Granica funkcji o wartościach rzeczywistych	57
4. Granica funkcji zmiennej rzeczywistej	58
5. Granica funkcji zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych	59
6. Przykłady	60
§ 10. Funkcje ciągłe	63
1. Definicja i podstawowe twierdzenia	63
2. Przykłady	65
§ 11. Ciągi funkcyjne	68
1. Zbieżność punktowa i zbieżność jednostajna	68

2. Własność granicy ciągu zbieżnego jednostajnie	69
§ 12. Przestrzenie topologiczne	71
1. Topologia. Zbiory otwarte. Wnętrze zbioru	71
2. Zbiory domknięte. Domknięcie zbioru	73
3. Topologia w przestrzeni metrycznej	74
§ 13. Topologia w podzbiorze przestrzeni topologicznej	77
1. Topologia indukowana	77
2. Przypadek przestrzeni metrycznej	78
§ 14. Produkt kartezjański przestrzeni topologicznych	79
1. Topologia w produkcie	79
2. Przypadek produktu przestrzeni metrycznych	79
§ 15. Funkcje ciągłe w przestrzeniach topologicznych	80
1. Definicja	80
2. Homeomorfizmy	81
§ 16. Przestrzenie ośrodkowe	82
1. Definicja	82
2. Przypadek przestrzeni metrycznej	83
3. Produkt kartezjański przestrzeni ośrodkowych	84
§ 17. Przestrzenie zwarte	85
1. Definicja. Przypadek przestrzeni metrycznej	85
2. Produkt kartezjański przestrzeni zwartych	87
3. Funkcje ciągłe na przestrzeniach metrycznych zwartych	88
4. Przestrzeń $C(X; Y)$	90
§ 18. Przestrzenie spójne	91
1. Definicja. Zbiory spójne w przestrzeni \mathbf{R}	91
2. Kryteria spójności	92
3. Zastosowanie: funkcje cyklometryczne i funkcja logarytmiczna	93
Rozdział II. Elementy analizy funkcjonalnej	96
§ 19. Przestrzenie unormowane	96
1. Przestrzenie liniowe	96
2. Przykłady	98
3. Podstawowe pojęcia geometryczne	98
4. Przestrzenie unormowane i przestrzenie Banacha	99
5. Produkt kartezjański przestrzeni unormowanych	101
6. Wektory statystyczne do zbioru. Hiperpłaszczyzna styczna	102
7. Funkcje o wartościach w przestrzeni unormowanej	103
8. Przestrzeń unormowana $C(X; Y)$	104
§ 20. Przestrzenie unitarne	105
1. Iloczyn skalarny. Przestrzenie unitarne i przestrzenie Hilberta	105
2. Ortogonalność. rzut ortogonalny	107
3. Przestrzenie unitarne skończenie wymiarowe	108
§ 21. Funkcje liniowe	110
1. Definicja. Funkcje liniowe ciągłe	110
2. Zbiór funkcji liniowych ciągłych $L(X; Y)$ jako przestrzeń unormowana	111
3. Przykłady	113
§ 22. Funkcje wieloliniowe	115
1. Definicja. Funkcje wieloliniowe ciągłe	115
2. Przestrzeń $L(X_1, \dots, X_k; Y)$	116
3. Przykłady	116
§ 23. Szeregi	119
1. Szeregi elementów przestrzeni unormowanych. Ogólne kryteria zbieżności	119

2. Przykłady	121
3. Szeregi zbieżne bezwzględnie	123
4. Szeregi liczb nieujemnych	125
5. Szeregi podwójne elementów przestrzeni unormowanej	127
6. Twierdzenie Cauchy'ego o mnożeniu szeregów	130
7. Szeregi podwójne liczb nieujemnych	131
8. Szeregi funkcyjne	133
§ 24. Izomorfizmy i izometrie	136
1. Przestrzenie izomorficzne	136
2. Przestrzenie izometryczne	138
3. Przykłady	139
Rozdział III. Wstępne wiadomości z rachunku różniczkowego i całkowego	142
§ 25. Pochodna funkcji zmiennej rzeczywistej	142
1. Definicje	142
2. Interpretacja geometryczna pochodnej	143
3. Podstawowe reguły różniczkowania	146
§ 26. Pochodna funkcji zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych	149
1. Przykłady	149
2. Pochodna nieskończona	152
3. Twierdzenie Rolle'a, Lagrange'a i Cauchy'ego	152
4. Reguły de L'Hospitala	154
§ 27. Ogólne twierdzenia o przyrostach dla funkcji zmiennej rzeczywistej	157
1. Problem uogólnienia twierdzeń Lagrange'a i Cauchy'ego na przypadek funkcji o wartościach w przestrzeniach unormowanych	157
2. Zastosowanie: pochodna granicy	158
§ 28. Pochodne wyższych rzędów funkcji zmiennej rzeczywistej	160
1. Definicje	160
2. Zastosowanie pochodnej rzędu drugiego do badania wypukłości funkcji	162
3. Wzór Taylora	164
4. Szereg Taylora	168
5. Funkcja wykładnicza i funkcje trygonometryczne zmiennej zespolonej	169
§ 29. Pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych rzeczywistych	171
1. Pochodne cząstkowe rzędu pierwszego	171
2. Twierdzenie o przyrostach. Warunek Lipschitza	172
3. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów	173
§ 30. Pochodne kierunkowe	175
1. Definicje	175
2. Związek z pochodnymi cząstkowymi	175
§ 31. Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona	177
1. Funkcja pierwotna	177
2. Całka nieoznaczona	179
3. Reguły całkowania	179
4. Całkowanie funkcji elementarnych	180
§ 32. Całka oznaczona funkcji ciągłej	186
1. Definicja	186
2. Wzory rachunkowe	187
3. Nierówności. Twierdzenie o wartości średniej	188
Rozdziały IV. Równania różniczkowe zwyczajne	191
§ 33. Ogólna teoria równań różniczkowych	191
1. Równanie różniczkowe rzędu pierwszego. Zagadnienia początkowe	191
2. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego	192

3. Układy równań różniczkowych rzędu pierwszego	199
4. Równania różniczkowe wyższych rzędów	200
§ 34. Równania różniczkowe liniowe	203
1. Układy równań liniowych rzędu pierwszego	203
2. Układy równań liniowych o stałych współczynnikach	206
3. Równanie liniowe rzędu n	209
4. Równanie liniowe rzędu n o stałych współczynnikach	212
Rozdział V. Ogólna teoria różniczkowa	215
§ 35. Pochodna funkcji określonej na podzbiornie przestrzeni unormowanej	215
1. Definicja. Związek z pochodną kierunkową	215
2. Przypadek funkcji zmiennej rzeczywistej. Równoważność obu definicji pochodnej	216
3. Interpretacja geometryczna pochodnej	217
4. Przykłady	219
5. Liniowość operacji różniczkowania	220
6. Twierdzenia o przyrostach	222
§ 36. Pochodna funkcji wielu zmiennych. Związek z pochodnymi cząstkowymi	224
1. Pochodna funkcji określonej na podzbiornie przestrzeni \mathbf{R}^m	224
2. Uogólnienie: pochodna funkcji określonej na podzbiornie produktu przestrzeni unormowanych	224
3. Pochodna funkcji o wartościach w produkcie przestrzeni unormowanych	228
4. Synteza obu przypadków	229
§ 37. Różniczkowanie złożenia	231
1. Ogólne twierdzenie o pochodnej złożenia	231
2. Różniczkowanie złożenia w przestrzeniach arytmetycznych	233
3. Uogólnione twierdzenie o pochodnej iloczynu	234
§ 38. Dyfeomorfizmy	235
1. Różniczkowanie funkcji odwrotnej	235
2. Odwzorowania regularne i dyfeomorfizmy	238
§ 39. Funkcje uwikłane	240
1. Ogólne twierdzenie o funkcjach uwikłanych	240
2. Funkcje uwikłane określone układem równań w przestrzeniach arytmetycznych	243
§ 40. Pochodne wyższych rzędów	245
1. Wstęp	245
2. Pochodna rzędu drugiego	246
3. Pochodna rzędu n	248
4. Przypadek funkcji zmiennej rzeczywistej. Równoważność obu definicji pochodnej rzędu n	250
5. Funkcje klasy C_n	251
6. Pochodna rzędu n funkcji wielu zmiennych rzeczywistych. Związek z pochodnymi cząstkowymi	253
7. Wzór Taylora	253
§ 41. Ekstrema funkcji	260
1. Definicja	260
2. Kryteria	260
Rozdział VI. Teoria miary i całki	266
§ 42. Ogólna teoria miary	266
1. Wstęp	266
2. μ -ciała	266
3. Miara	267
4. Miara zewnętrzna	271
§ 43. Miara Lebesgue'a w \mathbf{R}^m	276
1. Przedziały. Objętość przedziału	276
2. Miara Lebesgue'a	279
3. Charakteryzacja zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a	281

§ 44. Funkcje mierzalne	289
1. Definicja	289
2. Działania na funkcjach mierzalnych	291
§ 45. Całka funkcji mierzalnej nieujemnej	295
1. Całka funkcji prostej nieujemnej	295
2. Definicja całki funkcji mierzalnej nieujemnej	299
3. Podstawowe własności całki	301
4. Twierdzenie o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki	305
5. Całka jako funkcja zbioru	305
§ 46. Całka funkcji o wartościach w przestrzeni Banacha	307
1. Całka funkcji prostej	307
2. Całkowalność i definicja całki	310
3. Podstawowe własności funkcji całkowlanych	312
4. Przypadek funkcji o wartościach rzeczywistych	318
5. Twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki	319
6. Całka jako funkcja zbioru	322
§ 47. Całka Lebesgue'a	324
1. Wstęp	324
2. Całka funkcji ciągłej	324
3. Całka funkcji jednej zmiennej. Całki niewłaściwe	327
4. Zasada Cavalieriego	334
5. Geometryczna interpretacja całki funkcji mierzalnej nieujemnej	340
6. Całkowanie przez sprowadzenie do całki iterowanej	341
7. Całkowanie przez podstawienie	349
8. Całka jako funkcja parametrów	360
Rozdział VII. Całki na hiperpowierzchniach	364
§ 48. Hiperpowierzchnie	364
1. Definicja	364
2. Odwzorowania regularne pozdbiorów przestrzeni \mathbf{R}^k w przestrzeniach \mathbf{R}^m ($k \leq m$). Dyfeomorfizmy	367
3. Hiperpowierzchnie gładkie i kawałkami gładkie	370
4. Łuki i kontury	377
5. Podprzestrzeń styczna i hiperpłaszczyzna styczna	378
§ 49. Miara i całka na powierzchniach	382
1. Objętość równoległoscianu k -wymiarowego w \mathbf{R}^m	382
2. Miara i całka na hiperpowierzchni gładkiej	385
3. Miara i całka na hiperpowierzchni kawałkami gładkiej	391
§ 50. Formy różniczkowe	394
1. Funkcje wieloliniowe skośnie symetryczne	394
2. Iloczyn zewnętrzny funkcji wieloliniowych skośnie symetrycznych	396
3. Formy różniczkowe	401
4. Iloczyn zewnętrzny form różniczkowych	401
5. Różniczka zewnętrzna funkcji	403
6. Postać kanoniczna formy różniczkowej	403
7. Różniczka zewnętrzna formy różniczkowej	405
8. Zamiana zmiennych w formach różniczkowych	409
§ 51. Orientacja hiperpowierzchni	412
1. Orientacja przestrzeni liniowej skończenie wymiarowej	412
2. Orientacja podprzestrzeni $(k-1)$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej k -wymiarowej	414
3. Orientacja hiperpowierzchni. Hiperpowierzchnie orientowalne	415
§ 52. Całka formy różniczkowej na hiperpowierzchni zorientowanej	424

1. Definicja i podstawowe własności całki	424
2. Twierdzenie o rozkładzie jedności	429
3. Twierdzenie Stokesa	432
§ 53. Całka 1-formy po drodze	446
1. Definicja i podstawowe własności całki	446
2. Funkcja pierwotna i niezależność od drogi całkowania	449
3. Przypadek formy zamkniętej	452
4. Interpretacja w teorii pola	458
Rozdział VIII. Funkcje zmiennej zespolonej	460
§ 54. Różniczkowanie i całkowanie w dziedzinie zespolonej	460
1. Pochodna. Funkcje holomorficzne	460
2. Szeregi potęgowe	461
3. Kryterium różniczkowalności	464
4. Całkowanie po drodze. Funkcja pierwotna	466
5. Logarytm	467
6. Całka krzywoliniowa	469
§ 55. Wzór całkowy Cauchy'ego i jego konsekwencje	473
1. Wzór całkowy Cauchy'ego	473
2. Rozwijalność funkcji holomorficznej w szereg potęgowy. Funkcje analityczne	474
3. Zera funkcji holomorficznej	476
4. Rozwinięcie funkcji holomorficznej w szeregu Laurenta	476
5. Punkty osobliwe odosobnione	478
6. Residua funkcji holomorficznej	479
Rozdział IX. Wstęp do analizy harmoniczej	483
§ 56. Szeregi Fouriera	483
1. Szereg Fouriera funkcji okresowej	483
2. Kryterium Dirichleta	487
3. Funkcje o wahanu skończonym	492
4. Kryterium Jordana	493
§ 57. Wzór całkowy Fouriera	497
1. Wstęp	497
2. Kryteria przedstawialności funkcji wzorem całkowym Fouriera	498
Literatura	502